

# NÄHERUNGSWEISE BERECHNUNG DES WÄRME- UND STOFFAUSTAUSCHES IN LAMINAREN UEBERSCHALLGRENZSCHICHTEN BEI AUSBLASEN EINES LEICHTEN GASES\*

J. L. BANSAL

Aerodynamische Versuchsanstalt, Göttingen, Germany

(Received 12 September 1969)

**Zusammenfassung**—In der vorliegenden Untersuchung soll ein allgemeines Näherungsverfahren zur Berechnung einer Zweistoffgrenzschicht für den Fall entwickelt werden, dass die Flüssigkeitseigenschaften veränderlich sind und die Prandtl- und Schmidt-Zahl willkürlich sind und von der Konzentration abhängen. Das Verfahren wird auf verschiedene Strömungsprobleme angewandt, und die Ergebnisse werden, soweit möglich, mit bekannten exakten Lösungen verglichen. Es wird im Gegensatz zu den Ergebnissen von Baron gefunden, dass bei Heliuminjektion die Prandtl-Zahl an der Wand nicht unter den Wert 0,675 abnimmt. Darüber hinaus gehen die Ergebnisse für die Oberflächenreibung und den Massenübergang, die in der vorliegenden Untersuchung für beliebige Schmidt-Zahlen erhalten wurden, im Grenzfall  $Sc \rightarrow 1$  in die Lösung für den Fall  $Pr = Sc = 1$  über. Die Methode gestattet auch eine Lösung für die Plattenströmung bei homogenem Ausblasen zu finden, wo eine ähnliche Lösung nicht existiert.

## BEZEICHNUNGEN

- $A$ , definiert durch Gleichung (4. 8b);  
 $b_1, b_2$ , definiert durch Gleichungen (4.13) bzw. (4.12);  
 $C$ ,  $(c_{p12} - 1) c_{1w}$ ;  
 $c_Q$ , Mengenbeiwert des Ausblasens ( $= v_w/u_\infty$ );  
 $c_i$ , Massenkonzentration der  $i$ -ten Komponente ( $= \rho_i/\rho$ );  
 $c_{pi}$ , spez. Wärme der  $i$ -ten Komponente [ $\text{cm}^2 \text{s}^{-2} \text{grad}^{-1}$ ];  
 $c_{p12}$ ,  $c_{p1}/c_{p2}$ ;  
 $c_p$ , spez. Wärme des Gasgemisches [ $\text{cm}^2 \text{s}^{-2} \text{grad}^{-1}$ ];  
 $c_f$ , örtlicher Reibungsbeiwert;  
 $D$ ,  $P + 6$ ;  
 $D_{12}$ , Diffusionskoeffizient eines Zweistoffgemisches [ $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ ];  
 $d_1$ ,  $\left( \frac{\partial c_1}{\partial \eta} \right)_w$ ;  
 $d_2$ , definiert durch Gleichung (4. 8p);  
 $e_1$ ,  $\left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{H}{H_a} \right) \right\}_w$ ;  
 $e_2$ , definiert durch Gleichung (4. 8q);

\* Gekürzte Fassung einer von der Math. nat. Fakultät der Georg-August-Universität Göttingen angenommenen, unter Anleitung von Herrn Prof. Dr. W. Wuest, Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen, durchgeführten Dissertation.

- $f_w$ , reduzierter Mengenbeiwert des Ausblasens  $\left[ = -\frac{2v_w\rho_w}{\rho_\infty u_\infty} \sqrt{\left(\frac{Re_x}{K}\right)} \right]$ ;  
 $H$ , Gesamtenthalpie des Gasgemisches  $[\text{cm}^2 \text{s}^{-2}]$ ;  
 $\mathcal{H}$ ,  $H_w/H_a = (T_w/T_a) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_a^2\right) / (1+C)$ ;  
 $K$ , dimensionslose Sutherlandsche Konstante an der Wand für binäres Gasgemisch;  
 $l$ , charakteristische Länge  $[\text{cm}]$ ;  
 $Ma$ , Machzahl;  
 $m_i$ , Molmasse der  $i$ -ten Komponente  $[\text{g mol}^{-1}]$ ;  
 $N$ , eine Konstante, definiert durch Gleichung (6.4);  
 $Nu_x$ , örtliche Nusseltsche Zahl  $[ = -(\partial T/\partial y)_w x / (T_w - T_a) ]$ ;  
 $\bar{n}$ , normal zu einem Meridianschnitt (bei Rotationskörpern)  $[\text{cm}]$ ;  
 $P$ ,  $\alpha\{1 - \beta_1(1 - c_{1w})Sc_w\}$ ;  
 $Pr$ , Prandtlsche Zahl  $( = \mu c_p / \kappa )$ ;  
 $p$ , Druck  $[\text{g cm}^{-1} \text{s}^{-2}]$ ;  
 $R_i$ , Gaskonstante der  $i$ -ten Komponente  $[\text{cm}^2 \text{s}^{-2} \text{grad}^{-1}]$ ;  
 $Re$ , Reynolds'sche Zahl  $( = \rho_\infty u_\infty l / \mu_\infty )$ ;  
 $Re_x$ , örtliche Reynolds'sche Zahl  $( = \rho_\infty u_\infty x / \mu_\infty )$ ;  
 $Re_s$ , örtliche Reynolds'sche Zahl in achsensymmetrischer Strömung  $( = \rho_\infty u_\infty s / \mu_\infty )$ ;  
 $r$ , Temperaturrückgewinnfaktor (Recoveryfaktor);  
 $r_0(s)$ , Meridianschnitt eines Rotationskörpers  $[\text{cm}]$ ;  
 $Sc^*$ , definiert durch Gleichung (2.27);  
 $S_i$ , Sutherlandsche Temperaturkonstante der  $i$ -ten Komponente  $[\text{°K}]$ ;  
 $Sc$ , Schmidtsche Zahl  $( = \nu / D_{12} )$ ;  
 $St_{hr}$ , Stantonzahl für Wärmeübergang  $\left[ = -\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y}\right)_w \rho_\infty u_\infty c_{p\infty} (T_w - T_r) \right]$ ;  
 $St_{mr}$ , Stantonzahl für Stoffübergang  $[ = (\rho v)_w / \rho_\infty u_\infty (c_{1w} - c_{1\infty}) ]$ ;  
 $s$ , Koordinate längs der Meridianlinie eines Rotationskörpers  $[\text{cm}]$ ;  
 $T$ , Temperatur  $[\text{°K}]$ ;  
 $T_r$ , Gleichgewichtstemperatur  $[\text{°K}]$ ;  
 $t$ , Variable definiert durch die Dorodnitsyn-Transformation, siehe Gleichung (3.10);  
 $u, v$ , Geschwindigkeit längs der Wand bzw. quer zur Wand  $[\text{cm s}^{-1}]$ ;  
 $x, y$ , Koordinate längs der Wand bzw. quer zur Wand  $[\text{cm}]$ .

### Griechische Bezeichnungen

- $\alpha$ ,  $(\rho_a/\rho_w)(\mu_\infty/\mu_w)\varphi\sqrt{\lambda}$ ;  
 $\gamma$ , Verhältnis der spezifischen Wärmen  $( = c_p/c_v )$ ;  
 $\Delta$ , halber Kegelwinkel  $[\text{°}]$ ;  
 $\delta$ , Grenzschichtdicke  $[\text{cm}]$ ;  
 $\delta_i$ , Grenzschichtdicke in  $(x, t)$ -Ebene  $[\text{cm}]$ ;  
 $\delta^*$ , Verdrängungsdicke;  
 $\Theta$ , Stosswinkel  $[\text{°}]$ ;  
 $\mathcal{I}$ , Impulsverlustdicke;

- $\varphi$ ,  $(\rho_w v_w / \rho_\infty u_\infty) Re^{\frac{1}{2}}$ ;  
 $\xi$ ,  $x/l$ ;  
 $\eta$ ,  $t/\delta_i$ ;  
 $\zeta$ , dimensionslose Anlauf­länge  $\left[ = \left( \frac{v_w}{u_\infty} \right)^2 \frac{u_\infty x}{v_\infty} \right]$ ;  
 $\kappa$ , Wärmeleitfähigkeit  $[g\ cm\ s^{-3}\ grad^{-1}]$ ;  
 $\lambda$ ,  $[= (\delta_i/l)^2 Re]$ ;  
 $\mu$ , dynamische Zähigkeit  $[g\ cm^{-1}\ s^{-1}]$ ;  
 $\nu$ , kinematische Zähigkeit  $(= \mu/\rho)$   $[cm^2\ sec^{-1}]$ ;  
 $\rho$ , Gesamtdichte  $[g\ cm^{-3}]$ ;  
 $\rho_i$ , Dichte der  $i$ -ten Komponente  $[g\ cm^{-3}]$ ;  
 $\sigma_i$ , Moleküldurchmesser der  $i$ -ten Komponente  $[Å]$ ;  
 $\tau$ ,  $T_w/T_a$ ;  
 $\left. \begin{matrix} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \\ \varepsilon_3, \varepsilon_4, \end{matrix} \right\}$  Konstanten für eine gegebene binäre Gasmischung.

**Bedeutung der Indizes**

- $A$ , Werte für Rotationskörper;  
 $a$ , Werte am Aussenrand der Grenzschicht;  
 $h$ , Werte hinter dem Stoss;  
 $i$  ( $= 1; 2$ ), 1 für ausgeblasenes Gas (z.B. Helium),  
 2 für äusseres Gas (Luft);  
 $\bar{n}$ , normal zu einem Meridianschnitt (bei Rotationskörpern);  
 $s$ , längs eines Meridianschnitts (bei Rotationskörpern);  
 $v$ , Werte vor dem Stoss;  
 $w$ , Werte an der Wand;  
 $\infty$ , Werte in einem Bezugspunkt ausserhalb der Grenzschicht.

**1. EINLEITUNG**

DIE VERMINDERUNG des hohen Wärmeflusses an den Oberflächen hypersonischer Flugkörper ist ein wichtiges Problem, das in letzter Zeit sowohl theoretisch als auch experimentell untersucht worden ist. Eine erfolgversprechende Methode besteht in der Anwendung der Transpirations- oder Massenübergangskühlung. Ein solcher Kühlprozess kann z.B. mit Hilfe einer durchlässigen Wand verwirklicht werden, durch die ein Kühlmittel eingespritzt oder eingeblasen wird. Das Kühlmittel kann ein Gas, wie z.B. Luft, Helium oder Wasserstoff, oder eine Flüssigkeit wie z.B. Flüssigsauerstoff sein. Eine gleichartige Wirkung kann auch hervorgerufen werden, wenn das Wandmaterial (z.B. Graphit, Glas oder Kunststoff) unter dem Einfluss der heissen Grenzschicht sublimieren kann und durch die Verdampfungswärme eine wirksame Kühlung entsteht. In allen diesen Fällen werden Strömungsgrenzschichten gebildet, in denen zwei oder mehr Gase sich durch Diffusion miteinander mischen. Die herkömmlichen Grenzschichtgleichungen werden durch das Auftreten einer Gleichung erweitert, welche die Erhaltung der Spezies an irgendeiner Stelle der Grenzschicht definiert, und da verschiedene Gase auch verschiedene Werte der spezifischen Wärme haben, kann ein Energietransport auch durch Massentransport erfolgen und die Energiegleichung muss im Hinblick darauf abgeändert werden.

Die Gleichungen sind von Hall [1], Baron [2] und Wuest [3] abgeleitet worden. Eine Analysis dieser Gleichungen [(3.1) bis (3.6)] ist für konstante Flüssigkeitseigenschaften in inkompressibler Strömung von Hartnett und Eckert [4] gegeben worden. Sie betrachten zunächst den Fall  $Pr = Sc = 1$  für die Plattenströmung, wobei die drei Differentialgleichungen für Impuls, Energie und Speziesmasse identisch werden und die Ergebnisse von Schlichting und Bussmann [5] anwendbar sind, und gehen dann zu realistischeren Prandtl- und Schmidtzahlen über.

Eine Näherungslösung für die Strömung über eine Platte mit Wärmeübergang ist von Bansal [6] gegeben worden.

Für den Fall des Einblasens von Luft sind eine Anzahl von Untersuchungen durchgeführt worden. (Eine eingehende Bibliographie ist von Schlichting [7] gegeben worden.) Die Strömung in einer kompressiblen Grenzschicht ist z.B. durch Yuan [8], Lew und Fanucci [9] und Morduchow [10] untersucht worden. Lew und Fanucci [9] haben die Arbeit von Iglisch [11] für die inkompressible Grenzschicht mit homogener Absaugung auf die kompressible Grenzschicht an einer ebenen Platte mit Absaugen und Ausblasen erweitert, während Morduchow [12] und Morduchow und Rayle [13] für den gleichen Fall ein Näherungsverfahren entwickelt haben, das sich auf die v. Kármánschen Integralbedingungen stützt.

Es ist schon früher darauf hingewiesen worden, dass mit zunehmenden Fluggeschwindigkeiten in neuerer Zeit der Injektion einer Flüssigkeit in die Grenzschicht, die eine andere Zusammensetzung als die Hauptströmung hat, immer mehr Beachtung geschenkt wird. In diesem Fall müssen alle Gleichungen (3.1) bis (3.6) studiert werden, wobei die Abhängigkeit der Flüssigkeitseigenschaften von der Temperatur und Konzentration berücksichtigt werden müssen. H. Schuh [14] hat wahrscheinlich als erster die Konzentrationsgrenzschicht untersucht, wobei die physikalischen Eigenschaften der Bestandteile als unabhängig von der Konzentration angenommen wurden. Diese Einschränkungen wurden durch J. W. Smith [15] fallengelassen, der eine Theorie variabler Eigenschaften für eine Mischungsströmung in einer Hochgeschwindigkeitsgrenzschicht entwickelt. Einige Annahmen in der Theorie von Smith entsprechen nicht den physikalischen Erfordernissen und haben deshalb Kritik ausgelöst. In einer Untersuchung von J. R. Baron [2] wird die vollständige Gleichung aufgestellt und auf den Fall der ebenen Platte bei willkürlicher Prandtl- und Schmidtzahl angewandt. Baron berichtet überraschenderweise, dass bei Heliuminjektion die Prandtlzahl an der Wand bis zu einem Minimum ( $\sim 0,47$ ) bei  $c_{1w} = 0,2$  abnimmt, obwohl sowohl Helium als auch Luft für sich Prandtlzahlen von etwa 0,72 haben. Ausserdem sind seine Ergebnisse für die Oberflächenreibung und den Massenübergang (die unabhängig von der Prandtlzahl sind) für beliebige Schmidtzahlen bei Annäherung an  $Sc = 1$  nicht in enger Übereinstimmung mit den in der  $Pr = Sc = 1$ -Analysis gewonnenen Ergebnissen. Wuest [3, 16, 17] hat die Lösung der Gleichungen (3.1) bis (3.6) sowohl für verschwindende als auch nichtverschwindende Druckgradienten untersucht. Numerische Beispiele sind auf einem IBM-650-Computer für Überschallströmung längs einer ebenen Platte berechnet worden, wobei die Einblasegeschwindigkeit  $\sim 1/\sqrt{x}$  vorausgesetzt wurde und für nicht verschwindende äussere Druckgradienten die Wirkung der Dissipation und der kompressiblen Temperatureffekte vernachlässigt wurde, so dass die Lösung nur für kleine Machzahlen gültig ist. Das Kühlproblem an einer ebenen Platte mit Injektion eines leichten Gases ist auch von Hall [1] und Eckert *et al.* [18–20] untersucht worden.

Bei den oben erwähnten Untersuchungen sind in fast allen Fällen für eine Zweistoffgrenzschicht ähnliche Lösungen vorausgesetzt worden, wobei sich nur die Annahmen über die Flüssigkeitseigenschaften unterscheiden. Ein kurzer Überblick über die verschiedenen Theorien unter Einschluss einer turbulenten Zweistoffgrenzschicht ist von Gross *et al.* [21] gegeben worden. Für die näherungsweise Lösung einer Zweistoffgrenzschicht hat Baron [2] eine Lösung für die Mischungsströmung

an einer undurchlässigen Platte mit Hilfe des Pohlhausenverfahrens [22] gefunden. Wuest [23] hat ein mögliches Verfahren umrissen, um eine Näherungslösung für die Zweistoffgrenzschicht an einer durchlässigen Wand mit Hilfe der v. Kármánschen Integralbedingungen zu finden.

In der vorliegenden Untersuchung soll ein allgemeines Näherungsverfahren zur Berechnung einer Zweistoffgrenzschicht für den Fall entwickelt werden, dass die Flüssigkeitseigenschaften veränderlich sind und die Prandtl- und Schmidtzahl willkürlich ist und von der Konzentration abhängt. Das Verfahren wird auf verschiedene Strömungsprobleme angewandt, und die Ergebnisse werden, soweit möglich, mit bekannten exakten Lösungen verglichen. Es wird im Gegensatz zu den Ergebnissen von Baron gefunden, dass bei Heliuminjektion die Prandtlzahl an der Wand nicht unter 0,675 abnimmt. Darüber hinaus gehen die Ergebnisse für die Oberflächenreibung und den Massenübergang, die in der vorliegenden Analysis für beliebige Schmidtzahlen erhalten wurden, im Grenzfall  $Sc \rightarrow 1$  in die Analysis für den Fall  $Pr = Sc = 1$  über. Die Methode gestattet auch eine Lösung für die Plattenströmung bei homogenem Ausblasen zu finden, wo eine ähnliche Lösung nicht existiert. Es werden neue Ergebnisse zusammengetragen, die auch von praktischem Interesse sind und die für technische Anwendungen genügend genau sind.

## 2. TRANSPORTEIGENSCHAFTEN EINER BINÄREN GASMISCHUNG

Im folgenden wird angenommen, dass die beiden Gaskomponenten und die resultierende Mischung ideale Gase sind.

Die Ausdrücke für Dichte, spezifische Wärme, Diffusionskoeffizienten, Zähigkeitskoeffizienten, Wärmeleitungskoeffizienten, Prandtsche Zahl und Schmidtsche Zahl eines binären Gasmischs, wie sie bei Grenzschichtströmungen benutzt werden, sind folgende [24-26].

$$\frac{\rho_a}{\rho} = (1 + Qc_1) \frac{T}{T_a} \quad (2.1)$$

$$\frac{c_p}{c_{pa}} = 1 + (c_{p12} - 1)c_1 \quad (2.2)$$

$$\frac{D_{12}}{(D_{12})_a} = K(1 + \varepsilon_4 c_1) \left(\frac{T}{T_a}\right)^2 \frac{Sc_a}{Sc^*} \quad (2.3)$$

$$\frac{\mu}{\mu_a} = K(1 + \varepsilon_1 c_1 + \varepsilon_2 c_1^2) \frac{T}{T_a} \quad (2.4)$$

$$\frac{\kappa}{\kappa_a} = K(1 + \varepsilon_3 c_1) \frac{T}{T_a} \quad (2.5)$$

$$\frac{Pr}{Pr_a} = \frac{(1 + \varepsilon_1 c_1 + \varepsilon_2 c_1^2) [1 + (c_{p12} - 1)c_1]}{1 + \varepsilon_3 c_1} \quad (2.6)$$

$$\frac{Sc}{Sc^*} = \frac{(1 + \varepsilon_1 c_1 + \varepsilon_2 c_1^2)(1 + Qc_1)}{1 + \varepsilon_4 c_1} \quad (2.7)$$

mit

$$Q = \frac{m_2}{m_1} - 1 \quad (2.8)$$

$$c_{p12} = \frac{c_{p1}}{c_{p2}} \quad (2.9)$$

$$K = \frac{T_a + S_2}{T_w + (S_{12})_w} \left( \frac{T_w}{T_a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.10)$$

$$(S_{12})_w = (S_1 - S_2) c_{1w} + S_2 \quad (2.11)$$

$$Sc^* = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{m_2}{m_1}}} \left( \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2} \right)^2 Sc_a \quad (2.12)$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  und  $\varepsilon_4$  sind Konstanten für eine gegebene binäre Gasmischung.

Die thermische Zustandsgleichung eines binären Gasgemischs idealer Gase lautet :

$$p = \rho RT \quad (2.13)$$

mit

$$R = c_1 R_1 + (1 - c_1) R_2. \quad (2.14)$$

Die Tabellen der Konstantenwerte  $Q, c_{p12}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \gamma, S_1$  und  $S_2$  für verschiedene Gasmischungen wurden von Wuest [3] gegeben. Die Wert für He-Luft-Mischung stehen in Tabelle 1.

Table 1. In der numerischen Rechnung verwendete konstante Werte für Helium-Luft-Mischung

$Q$	6,25	Gleichung (2. 17b)
$c_{p12}$	5,18	$c_{p1}/c_{p2}$
$\varepsilon_1$	0,097	Gleichung (2. 32)
$\varepsilon_2$	0,0	Gleichung (2. 32)
$\varepsilon_3$	4,87	Gleichung (2. 33)
$\varepsilon_4$	0,11	Gleichung (2. 27)
$Pr_a$	0,72	Prandtlische Zahl für Luft
$\sigma_1$	2,18 [Å]	Moleküldurchmesser der ersten Komponente (He)
$\sigma_2$	3,75 [Å]	Moleküldurchmesser der zweiten Komponente (Luft)
$\sigma_{12}$	2,965 [Å]	$(\sigma_1 + \sigma_2)/2$
$Sc_a$	0,78	Selbstdiffusions-Schmidtzahl der Luft
$Sc^*$	0,24	Gleichung (2. 29)
$T_a$	293 [°K]	Temperatur am äusseren Rand der Grenzschicht
$S_1$	90 [°K]	Sutherlandsche Temperaturkonstante der ersten Komponente (He)
$S_2$	111 [°K]	Sutherlandsche Temperaturkonstante der zweiten Komponente (Luft)

### 3. GRENZSCHICHTGLEICHUNGEN BEI EINEM BINÄREM GASGEMISCH

Wenn man die Grenzschicht-Voraussetzungen für die gasdynamischen Gleichungen, die durch die kinetische Gastheorie gewonnen werden, anwendet, können die bekannten Gleichungen der

laminaren Grenzschicht für die stationäre zweidimensionale Strömung einer binären Gas-  
mischung wie folgt ausgedrückt werden [27]:

Konzentration

$$\rho u \frac{\partial c_1}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho D_{12} \frac{\partial c_1}{\partial y} \right) \quad (3.1)$$

Kontinuität

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (3.2)$$

Impuls

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3.4)$$

Energie

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial y} + \mu \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial y} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( 1 - \frac{Sc}{Pr} \right) \rho D_{12} \sum_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Darin bedeutet

$$h_i = c_{pi} T, \quad (3.5a)$$

$$h = \sum_i c_i h_i \quad (3.5b)$$

und

$$H = h + u^2/2 \quad (3.5c)$$

Zustandsgleichung

$$p = \rho RT. \quad (3.6)$$

Die Stoffwerte  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $D_{12}$ ,  $c_p$  und Prandtl'sche und Schmidt'sche Zahlen des Gemisches sind als örtlich veränderlich vorausgesetzt. Die thermische Diffusion ist im technischen Stoffaustausch im allgemeinen vernachlässigbar klein und ist daher in den obigen Gleichungen nicht enthalten.

### 3.1 Randbedingungen

Die Randbedingungen für das obige System von Gleichungen sind an der Oberfläche des Körpers durch das Haften gegeben und durch die Forderung der Ähnlichkeit der  $v$ -Geschwindigkeitskomponente, der Konzentration an der Wand und der Enthalpie:

für  $y = 0$ :

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ v &= v_w(x) \\ H &= H_w \\ c_1 &= c_{1w}(x). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Am äusseren Rand der Grenzschicht muss die Geschwindigkeit und die Enthalpie gleich den Werten in der freien Strömung sein. Die Konzentration irgendeines Materials, das an der Oberfläche ausgeblasen wird, wird gleich Null in der äusseren Strömung.

Daraus folgt:

für  $y \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} u &= u_a(x) \\ H &= H_a(x) \\ c_1 &= 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Die letzte Randbedingung erhält man unter der Voraussetzung, dass die Massengeschwindigkeit der Luftmoleküle (oder die zweite Komponente in der binären Mischung) an der Oberfläche des Körpers verschwindet, d.h., es gibt im ganzen keinen Massenübergang des Luftanteils in die Körperoberfläche. Deshalb muss der Massenfluss der Luft durch Konvektion von der Oberfläche gleich und entgegengesetzt zur Diffusionsströmung der Luft in Richtung auf die Oberfläche sein. Aus diesen Betrachtungen ergibt sich die bekannte Eckert-Schneider-Bedingung, die durch die folgende Gleichung dargestellt wird [3]:

$$v_w(x) = - \left[ \frac{D_{12}}{c_2} \frac{\partial c_1}{\partial y} \right]_w \tag{3.9}$$

Auf den ersten Blick könnte man aus (3.7) bis (3.9) schliessen, dass acht Randbedingungen aufgeführt worden sind, während eine Untersuchung der Differential-Gleichungen zeigt, dass nur sieben Bedingungen gefordert sind. Wenn wir die Bedingung (3.9) näher betrachten, dann wird es offenbar, dass die Ausblasegeschwindigkeit und die Konzentration an der Wand nicht unabhängige Grössen sind und um eine zu finden, die andere vorgegeben sein muss. Diese Tatsache wird klar werden, wenn die spezifischen Strömungsprobleme im weiteren Text gelöst werden.

### 3.2 Differential-Integral-Gleichungen

Nach der Dorodnitsynschen Transformation

$$y = \int_0^t \frac{\rho_a}{\rho} dt \tag{3.10}$$

und

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{t}{\delta_t} \quad (t = \delta_t, \text{ wenn } y = \delta) \\ \xi &= \frac{x}{l} \\ \lambda &= \left(\frac{\delta_t}{l}\right)^2 Re \\ \varphi &= \frac{\rho_w v_w}{\rho_\infty u_\infty} Re^{\frac{1}{2}} \\ Re &= \frac{\rho_\infty u_\infty l}{\mu_\infty} \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

werden die Gleichungen (3.1) bis (3.6) in die folgenden Integro-Differential-Gleichungen verwandelt [24]:

Impuls

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}F_1\lambda' + \lambda \left\{ F_1' + F_1 \frac{\rho_a'}{\rho} + \frac{u_a'}{u_a} (F_1 + F_2 + QF_6) \right\} \\ = \frac{u_\infty \rho_\infty}{u_a \rho_a} \varphi(\sqrt{\lambda}) + \frac{u_\infty \rho_\infty \rho_w \mu_w}{u_a \rho_a \rho_a \mu_\infty} F_3 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Energie

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}F_4\lambda' + \lambda \left\{ F_4' + F_4 \left( \frac{\rho_a'}{\rho_a} + \frac{u_a'}{u_a} + \frac{H_a'}{H_a} \right) \right\} \\ = \frac{u_\infty \rho_\infty}{u_a \rho_a} \varphi(\sqrt{\lambda}) \left\{ \left( 1 - \frac{H_w}{H_a} \right) + \frac{H_w}{H_a} (1 - c_{1w}) (c_{p12} - 1) \right. \\ \left. \times \frac{c_{pa}}{c_{pw}} \left( \frac{Sc_w}{Pr_w} - 1 \right) \right\} + \frac{u_\infty \rho_\infty \rho_w \mu_w}{u_a \rho_a \rho_a \mu_\infty} \frac{1}{Pr_w} F_5 \end{aligned} \quad (3.13)$$

und

Konzentration

$$\frac{1}{2}F_7\lambda' + \lambda \left\{ F_7' + F_7 \left( \frac{\rho_a'}{\rho_a} + \frac{u_a'}{u_a} \right) \right\} = \frac{u_\infty \rho_\infty}{u_a \rho_a} \varphi \sqrt{\lambda} \quad (3.14)$$

wobei der Strich die Ableitung nach  $\xi$  anzeigt, und

$$F_1 = \int_0^1 \frac{u}{u_a} \left( 1 - \frac{u}{u_a} \right) d\eta \quad (3.15a)$$

$$F_2 = \int_0^1 \left\{ \frac{T}{T_a} - \left( \frac{u}{u_a} \right)^2 \right\} d\eta \quad (3.15b)$$

$$F_3 = \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{u}{u_a} \right) \right\}_w \quad (3.15c)$$

$$F_4 = \int_0^1 \frac{u}{u_a} \left( 1 - \frac{H}{H_a} \right) d\eta \quad (3.15d)$$

$$F_5 = \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{H}{H_a} \right) \right\}_w \quad (3.15e)$$

$$F_6 = \int_0^1 c_1 \frac{T}{T_a} d\eta \quad (3.15f)$$

$$F_7 = \int_0^1 c_1 \frac{u}{u_a} d\eta \quad (3.15g)$$

$$\frac{H}{H_a} = \left[ \frac{c_p T}{c_{pa} T_a} + \left( \frac{u}{u_a} \right)^2 \frac{\gamma - 1}{2} Ma_a^2 \right] \frac{1}{1 + [(\gamma - 1)/2] Ma_a^2} \quad (3.16)$$

In den abgeleiteten Gleichungen (3.12) bis (3.14) ist eine einzige Grenzschichtdicke vorausgesetzt. Das ist eine Alternative zu der Einführung von drei Grenzschichtdicken, nämlich, eine Geschwindigkeits- oder Impuls-Grenzschichtdicke, eine Gesamtenthalpie- oder thermische Grenzschichtdicke und eine Diffusions-Grenzschichtdicke. Die Voraussetzung einer einzigen Grenzschichtdicke ist möglich für Flüssigkeiten mit Prandtlschen und Schmidtschen Zahlen in der der Nähe von 1 (die meisten Gase erfüllen diese Bedingung). Wie wir später in Kapitel 4 sehen werden, legt ferner die Einführung einer einzigen Grenzschichtdicke notwendigerweise keine zwingenden Beschränkungen für die Enthalpie- und Diffusionsprofile auf, weil beide einen zusätzlichen Koeffizienten enthalten können, der nicht durch die Randbedingungen bestimmt ist. Diese Koeffizienten, die  $e_1$  und  $d_1$  genannt werden, ersetzen die Enthalpie- und Diffusionsgrenzschichtdicke wie die anderen zwei Unbekannten, die durch die Gleichungen (3.12) bis (3.14) bestimmt werden.

#### 4. ALLGEMEINE LÖSUNG DER INTEGRO-DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

##### 4.1 Polynom-Darstellung

Die Gleichungen (3.12) bis (3.14) können in gewöhnliche Differentialgleichungen umgeschrieben werden, wenn man die Geschwindigkeits-, die Gesamtenthalpie- und die Konzentrationsprofile als bestimmte Funktionen der Variablen  $\eta$  annimmt, mit gewissen Parametern als unbekannte Funktionen von  $\xi$ , die (3.12) bis (3.14) genügen müssen. In dieser Arbeit werden Geschwindigkeitsprofile vierten Grades und Gesamtenthalpie- und Konzentrationsprofile fünften Grades gewählt, die die folgenden Wandbindungen erfüllen [24]

Geschwindigkeit

für:  $\eta = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{u}{u_a} = 0 \\ & \left[ \alpha + \beta_1 \left( \frac{\partial c_1}{\partial \eta} \right)_w \right] \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{u}{u_a} \right) \right\}_w = A + \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left( \frac{u}{u_a} \right) \right\}_w \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

für  $\eta = 1$ :

$$\frac{u}{u_a} = 1, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{u}{u_a} \right) = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left( \frac{u}{u_a} \right) = 0$$

**Gesamtenthalpie**

für  $\eta = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{H}{H_a} = \mathcal{H} \\ & \left[ \alpha Pr_w + \beta_2 \left( \frac{\partial c_1}{\partial \eta} \right)_w \right] \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{H}{H_a} \right) \right\}_w = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left( \frac{H}{H_a} \right) \right\}_w - \beta_3 \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{u}{u_a} \right) \right\}_w^2 \\ & \qquad \qquad \qquad - \beta_4 \left( \frac{\partial^2 c_1}{\partial \eta^2} \right)_w + \beta_5 \left( \frac{\partial c_1}{\partial \eta} \right)_w^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

für  $\eta = 1$ :

$$\frac{H}{H_a} = 1, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{H}{H_a} \right) = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left( \frac{H}{H_a} \right) = 0$$

**Konzentration**

für  $\eta = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} & c_1 = c_{1w}(\xi) \\ & \left[ \alpha Sc_w + \beta_6 \left( \frac{\partial c_1}{\partial \eta} \right)_w \right] \left( \frac{\partial c_1}{\partial \eta} \right)_w = \left( \frac{\partial^2 c_1}{\partial \eta^2} \right)_w \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

für  $\eta = 1$ :

$$c_1 = 0, \quad \frac{\partial c_1}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 c_1}{\partial \eta^2} = 0.$$

Ausserdem gilt nach (3.9)

$$\left( \frac{\partial c_1}{\partial \eta} \right)_w = -\alpha(1 - c_{1w}) Sc_w \quad (4.4)$$

Damit ergeben sich für das Geschwindigkeitsprofil vierten Grades und das Gesamtenthalpie- und Konzentrationsprofil fünften Grades, die obige Wandbindungen erfüllen, die folgenden Ausdrücke:

$$\frac{u}{u_a} = \frac{1}{D} [(12\eta - 12\eta^3 + 6\eta^4) + P(6\eta^2 - 8\eta^3 + 3\eta^4) + A(\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4)] \quad (4.5)$$

$$\frac{H}{H_a} = 1 + (\mathcal{H} - 1)(1 - 10\eta^3 + 15\eta^4 - 6\eta^5) + (\eta - 6\eta^3 + 8\eta^4 - 3\eta^5) e_1 + (\eta^2 - 3\eta^3 + 3\eta^4 - \eta^5) e \quad (4.6)$$

und

$$c_1 = (1 - 10\eta^3 + 15\eta^4 - 6\eta^5) c_{1w} + (\eta - 6\eta^3 + 8\eta^4 - 3\eta^5) d_1 + (\eta^2 - 3\eta^3 + 3\eta^4 - \eta^5) d_2 \quad (4.7)$$

mit

$$\alpha = \frac{\rho_a \delta_i v_w}{\mu_w} = \frac{\rho_a \mu_\infty}{\rho_w \mu_w} \varphi \sqrt{\lambda} \quad (4.8a)$$

$$A = \left( \frac{\rho_a}{\rho_w} \right)^2 \left( \frac{\rho_a}{\rho_\infty} \right) \left( \frac{u_a}{u_\infty} \right) \left( \frac{u'_a}{u_\infty} \right) \lambda \quad (4.8b)$$

$$C = (c_{p12} - 1) c_{1w} \quad (4.8c)$$

$$\mathcal{H} = \frac{H_w}{H_a} = \frac{(T_w/T_a)(1 + C)}{1 + [(\gamma - 1)/2] Ma_a^2} \quad (4.8d)$$

$$\alpha_1 = (c_{p12} - 1)/(1 + C) \quad (4.8e)$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{Q}{1 + Qc_{1w}} - \frac{\varepsilon_3}{1 + \varepsilon_3 c_{1w}} \quad (4.8f)$$

$$\beta_1 = \frac{Q}{1 + Qc_{1w}} - \frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 c_{1w}}{1 + \varepsilon_1 c_{1w} + \varepsilon_2 c_{1w}^2} \quad (4.8g)$$

$$\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_1 \left( 1 - \frac{Pr_w}{Sc_w} \right) \quad (4.8h)$$

$$\beta_3 = \frac{(1 - Pr_w)(\gamma - 1) Ma_a^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_a^2} \quad (4.8i)$$

$$\beta_4 = \alpha_1 \left( 1 - \frac{Pr_w}{Sc_w} \right) \mathcal{H} \quad (4.8j)$$

$$\beta_5 = \alpha_1 \left[ (\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_1 + \beta_6) \frac{Pr_w}{Sc_w} \right] \mathcal{H} \quad (4.8k)$$

$$\beta_6 = \frac{2Q}{1 + Qc_{1w}} - \frac{\varepsilon_4}{1 + \varepsilon_4 c_{1w}} \quad (4.8l)$$

$$P = \alpha + \beta_1 \left( \frac{\partial c_1}{\partial \eta} \right)_w = \alpha [1 - \beta_1 (1 - c_{1w}) Sc_w] \quad (4.8m)$$

$$D = P + 6 \quad (4.8n)$$

$$d_1 = \left( \frac{\partial c_1}{\partial \eta} \right)_w = -\alpha(1 - c_{1w}) Sc_w \quad (4.8o)$$

$$d_2 = \frac{1}{2}(\alpha Sc_w + \beta_6 d_1) d_1 \quad (4.8p)$$

$$e_2 = \frac{1}{2} \left[ (\alpha Pr_w + \beta_2 d_1) e_1 + \beta_3 \left( \frac{12 + A}{D} \right)^2 + 2\beta_4 d_2 - \beta_5 d_1^2 \right] \quad (4.8q)$$

$$Pr_w = \frac{(1 + \varepsilon_1 c_{1w} + \varepsilon_2 c_{1w}^2)(1 + (c_{p12} - 1) c_{1w})}{1 + \varepsilon_3 c_{1w}} Pr_a \quad (4.8r)$$

und

$$Sc_w = \frac{(1 + \varepsilon_1 c_{1w} + \varepsilon_2 c_{1w}^2)(1 + Qc_{1w})}{1 + \varepsilon_4 c_{1w}} Sc^*, \quad (4.8s)$$

wobei der Strich die Ableitung nach  $\xi$  anzeigt.

#### 4.2 Formulierung des Problems

Das Problem unserer Untersuchung kann nun folgendermassen formuliert werden: Vorgegeben seien ein binäres Gasgemisch (d.h., die Werte von  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, Q, \gamma, c_{p12}, Pr_w, Sc, S_1$  und  $S_2$ ), ein konstantes Verhältnis  $T_w/T_\infty$  von Wandtemperatur zu einer Bezugstemperatur ausserhalb der Grenzschicht, eine Machzahl ( $Ma_\infty$ ), die Verteilung der Ausblasegeschwindigkeit  $v_w(\xi)$  [oder die Konzentration  $c_{1w}(\xi)$  an der Wand] und die Geschwindigkeitsverteilung  $(u_a/u_\infty)(\xi)$ . Dann können die Gleichungen (3.12), (3.12), (3.14) und (4.4) für  $\lambda(\xi), d_1(\xi), e_1(\xi)$  und  $c_{1w}(\xi)$  [oder  $v_w(\xi)$ ] gelöst werden. Wie man sieht, gibt Gleichung (4.4) die einfache Beziehung (4.8o) zwischen  $d_1(\xi)$  und  $c_{1w}(\xi)$ . Daher kann, sobald die drei Unbekannten  $\lambda(\xi), c_{1w}(\xi)$  und  $e_1(\xi)$  aus den Gleichungen (3.12) bis (3.14) bestimmt sind, die Unbekannte  $d_1(\xi)$  aus (4.8o) berechnet werden.

#### 4.3 Bestimmung der Funktionen $F_1$ bis $F_7$

Die Differential- und Integralfunktionen  $F_1, F_3, F_4, F_5$  und  $F_7$  erhält man, wenn man die Ausdrücke von  $u/u_\infty, H/H_a$  und  $c_1$  in (3.15) einsetzt. Obwohl die Integrale  $F_2$  und  $F_6$  auf ähnliche Weise nach (3.16) erhalten werden können, ist doch die Durchführung dieser Rechnung sehr schwierig, und die sich so ergebenden Ausdrücke für  $F_2$  und  $F_6$  sind für die Behandlung spezieller Strömungsprobleme zu kompliziert.

Um diese Schwierigkeit zu vermeiden, wollen wir  $T/T_a$  als ein Polynom fünften Grades in  $\eta$  ansetzen, das die folgenden Wandbindungen erfüllt [24]:

für  $\eta = 0$ :

$$\frac{T}{T_a} = \tau,$$

$$\left[ \alpha Pr_w + \beta_7 \left( \frac{\partial c_1}{\partial \eta} \right)_w \right] \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{T}{T_a} \right) \right\}_w = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left( \frac{T}{T_a} \right) \right\}_w + \beta_8 \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{u}{u_a} \right) \right\}_w^2 \quad (4.9)$$

für  $\eta = 1$ :

$$\frac{T}{T_a} = 1, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{T}{T_a} \right) = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left( \frac{T}{T_a} \right) = 0.$$

mit

$$\tau = \frac{T_w}{T_a} \quad (4.10a)$$

$$\beta_7 = \alpha_2 - \alpha_1 \left( 1 + \frac{Pr_w}{Sc_w} \right) \quad (4.10b)$$

und  $H$

$$\beta_8 = Pr_w(\gamma - 1) Ma_a^2 / (1 + C). \quad (4.10c)$$

Das gesuchte Polynom für  $T/T_a$ , welches die Bedingungen (4.9) erfüllt, lautet

$$\frac{T}{T_a} = 1 + (\tau - 1)(1 - 10\eta^3 + 15\eta^4 - 6\eta^5) + (\eta - 6\eta^3 + 8\eta^4 - 3\eta^5) b_1 + (\eta_2 - 3\eta_3 + 3\eta^4 - \eta^5) b_2 \quad (4.11)$$

mit

$$b_2 = \frac{1}{2} \left[ (\alpha Pr_w + \beta_7 d_1) b_1 - \beta_8 \left( \frac{12 + A}{D} \right)^2 \right]. \quad (4.12)$$

Der unbekannte Parameter  $b_1$  ist durch (3.16) mit den unbekanntem Parametern  $\lambda$ ,  $e_1$  und  $d_1$  verbunden.

Setzt man die Polynome von  $u/u_a$ ,  $H/H_a$ ,  $c_1$  und  $T/T_a$  in (3.16) ein und vergleicht die Koeffizienten von  $\eta$  auf beiden Seiten, so erhält man

$$b_1 = \left[ e_1 \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right) - \tau(c_{p12} - 1) d_1 \right] / (1 + C). \quad (4.13)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_0^1 \frac{u}{u_a} \left( 1 - \frac{u}{u_a} \right) d\eta \\ &= \frac{1}{D} (4,2 + 0,6 P + 0,05 A) - \frac{1}{D^2} (20,97142 + 6,31428 P + 0,48571 P^2 + 0,33812 A \\ &\quad + 0,00396 A^2 + 0,04050 AP) \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} F_2 &= \int_0^1 \left\{ \frac{T}{T_a} - \left( \frac{u}{u_a} \right)^2 \right\} d\eta \\ &= 1 + 0,5(\tau - 1) + 0,1 b_1 + 0,01666 b_2 - \frac{1}{D^2} [20,97142 + 6,31428 P + 0,4871 P^2 \\ &\quad + 0,33812 A + 0,00396 A^2 + 0,04050 AP] \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$F_3 = \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{u}{u_a} \right) \right\}_w = \frac{12 + A}{D} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned}
 F_4 &= \int_0^1 \frac{u}{u_a} \left( 1 - \frac{H}{H_a} \right) d\eta \\
 &= \frac{1}{D} [(1,45714 + 0,16904 P + 0,03692 A)(1 - \mathcal{H}) - (0,37618 + 0,04761 P + 0,00754 A) e_1 \\
 &\quad - (0,06904 + 0,00912 P + 0,00120 A) e_2] \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

$$F_5 = \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{H}{H_a} \right) \right\} = e_1 \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}
 F_6 &= \int_0^1 c_1 \frac{T}{T_a} d\eta \\
 &= [0,5 + 0,39176(\tau - 1) + 0,06730 b_1 + 0,01012 b_2] c_{1w} \\
 &\quad + [0,1 + 0,06730(\tau - 1) + 0,01499 b^1 + 0,00247 b_2] d_1 \\
 &\quad + [0,01666 + 0,01013(\tau - 1) + 0,00247 b_1 + 0,00041 b_2] d_2 \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 F_7 &= \int_0^1 c_1 \frac{u}{u_a} d\eta \\
 &= \frac{1}{D} [(1,45714 + 0,16904 P + 0,03692 A) c_{1w} + (0,37618 + 0,04761 P + 0,00754 A) d_1 \\
 &\quad + (0,06904 + 0,00912 P + 0,00120 A) d_2]. \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

#### 4.4 Die charakteristischen Grenzschicht-Parameter

Nach der Lösung der Integro-Differentialgleichungen und der Bestimmung der Unbekannten  $\lambda$ ,  $c_{1w}$  und  $e_1$  können die gewünschten Grenzschicht-Parameter direkt berechnet werden.

Nach Gleichung (3.10) kann die Rücktransformation in die  $(x, y)$ -Ebene durch

$$\left( \frac{y}{l} \right) (\sqrt{Re}) = (\sqrt{\lambda}) \int_0^{\eta} \frac{\rho_a}{\rho} d\eta$$

oder

$$\frac{y}{x} (\sqrt{Re_x}) = \sqrt{\left( \frac{\lambda}{\xi} \right)} \int_0^{\eta} (1 + Qc_1) \frac{T}{T_a} d\eta \quad (4.21)$$

erreicht werden.

Die Verdrängungsdicke  $\delta^*$  ist definiert durch

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left( 1 - \frac{\rho u}{\rho_a u_a} \right) dy$$

oder

$$\frac{\delta^*}{\delta_t} = \int_0^1 \frac{\rho_a}{\rho} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_a u_a}\right) d\eta.$$

Die dimensionslose Verdrängungsdicke ist dann gegeben durch:

$$\frac{\delta^*}{x} (\sqrt{Re_x}) = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\xi}\right)} [F_2 + QF_6 - F_1]. \quad (4.22)$$

Die Impulsverlustdicke ist definiert durch

$$\mathfrak{g} = \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_a u_a} \left(1 - \frac{u}{u_a}\right) dy$$

oder

$$\frac{\mathfrak{g}}{\delta_t} = \int_0^1 \frac{u}{u_a} \left(1 - \frac{u}{u_a}\right) d\eta = F_1.$$

Die dimensionslose Impulsverlustdicke lautet dann:

$$\frac{\mathfrak{g}}{x} (\sqrt{Re_x}) = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\xi}\right)} F_1. \quad (4.23)$$

Der örtliche Reibungsbeiwert ist definiert durch

$$c_f = \frac{(\mu \partial u / \partial y)_w}{\frac{1}{2} \rho_\infty u_\infty^2}. \quad (4.24)$$

Mit unseren Bezeichnungen reduziert er sich auf

$$c_f (\sqrt{Re_x}) = 2 \frac{u_a}{u_\infty} \frac{\mu_a}{\mu_\infty} \frac{\varphi \sqrt{\lambda}}{\alpha} \sqrt{\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)} F_3. \quad (4.25)$$

Die örtliche Stantonzahl  $St_m$  für den Stoffübergang ist definiert durch [2]:

$$St_m = \frac{(\rho v)_w}{\rho_\infty u_\infty (c_{1w} - c_{1\infty})}. \quad (4.26)$$

Mit unseren Bezeichnungen reduziert sie sich auf

$$St_m (\sqrt{Re_x}) = \frac{\varphi \sqrt{\lambda}}{c_{1w}} \sqrt{\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)}. \quad (4.27)$$

Die Temperatur  $T_w$ , welche eine Oberfläche unter dem Einfluss der inneren Reibung annimmt, heisst "Gleichgewichtstemperatur" oder "adiabatische Wandtemperatur". Mathematisch heisst das:  $T_r = T_w$ , wenn

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{T}{T_a} \right) \right\}_w = 0.$$

Damit haben wir

$$0 = \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{T}{T_a} \right) \right\}_w = \left[ \frac{e_1(1 + [(\gamma - 1)/2] Ma_a^2) + (T_w/T_a)(c_{p12} - 1)\alpha(1 - c_{1w})Sc_w}{1 + C} \right]_{T_w=T_r} \quad (4.28)$$

$$\frac{T_r}{T_a} = - \left[ \frac{(1 + [(\gamma - 1)/2] Ma_a^2) e_1}{(c_{p12} - 1)\alpha(1 - c_{1w})Sc_w} \right]_{T_w=T_r} \quad (4.29)$$

Der Temperaturrückgewinnfaktor "r" beschreibt die Energieverteilung in einer Uberschallströmung. Der Faktor "r" ist definiert als [7].

$$r = \frac{T_r/T_a - 1}{[(\gamma - 1)/2] Ma_a^2} \quad (4.30)$$

Die örtliche Stantonzahl  $St_h$  für den Wärmeübergang ist definiert durch [2]:

$$St_h = - \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w / \rho_\infty u_\infty c_{p\infty} (T_w - T_r)$$

Mit unseren Bezeichnungen reduziert sie sich auf

$$St_h (\sqrt{Re_x}) = \frac{c_{pw}}{c_{p\infty}} \frac{T_a}{(T_r - T_w)} \frac{b_1}{Pr_w} \frac{\varphi \sqrt{\lambda}}{\alpha} \sqrt{\left( \frac{\xi}{\lambda} \right)} \quad (4.31)$$

## 5. EINE EINFACHE LÖSUNG DER GRUNDGLEICHUNGEN FÜR DEN FALL $Pr = Sc = 1$

### 5.1 Einführung

Für den Fall eines verschwindenden Druckgradienten und einer Prandtl- und Schmidtzahl, die im gesamten Strömungsfeld den Wert 1 haben, vereinfachen sich die Integro-Differentialgleichungen (3.12) bis (3.14) beträchtlich. Um die Genauigkeit der hier erhaltenen Näherungslösung zu betrachten, vergleichen wir ihre Ergebnisse mit einigen exakten (numerischen) Lösungen.

### 5.2 Lösungsmethode

In dem vorliegenden Fall reduzieren sich die Gleichungen (3.12) bis (3.14) auf

Impuls

$$\frac{1}{2} F_1 \lambda' + \lambda F_1' = \varphi(\sqrt{\lambda}) + \frac{\rho_w \mu_w}{\rho_a \mu_\infty} F_3 \quad (5.1)$$

Energie

$$\frac{1}{2} F_4 \lambda' + \lambda F_4' = \varphi(\sqrt{\lambda})(1 - \mathcal{H}) + \frac{\rho_w \mu_w}{\rho_a \mu_\infty} F_5 \quad (5.2)$$

Konzentration

$$\frac{1}{2} F_7 \lambda' + \lambda F_7' = \varphi(\sqrt{\lambda}) \quad (5.3)$$

mit

$$\varphi(\sqrt{\lambda}) = \alpha \frac{\rho_w \mu_w}{\rho_a \mu_\infty}. \quad (4.8a)$$

Aus (4.8o) wird

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{c_1}{c_{1w}} \right) \right\}_w = \alpha \left( 1 - \frac{1}{c_{1w}} \right). \quad (5.4)$$

Die Gleichungen (5.1) bis (5.3) können mit Hilfe von (4.8a) und (5.4) umgeschrieben werden zu

$$\frac{1}{2} F_1 \lambda' + \lambda F_1' = \frac{\varphi \sqrt{\lambda}}{c_{1w}} \left[ c_{1w} + (c_{1w} - 1) F_3 / \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{c_1}{c_{1w}} \right) \right\}_w \right] \quad (5.5)$$

$$\frac{1}{2} F_4 \lambda' + \lambda F_4' = \frac{\varphi \sqrt{\lambda}}{c_{1w}} \left[ (1 - \mathcal{H}) c_{1w} + (c_{1w} - 1) F_5 / \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{c_1}{c_{1w}} \right) \right\}_w \right] \quad (5.6)$$

und

$$\frac{1}{2} F_7 \lambda' + \lambda F_7' = \frac{\varphi \sqrt{\lambda}}{c_{1w}} \cdot c_{1w}. \quad (5.7)$$

Unter Berücksichtigung der Differential-Integral-Funktionen (3.15) kann man aus (5.5) bis (5.7) leicht sehen, dass, wenn  $c_{1w}$  und  $T_w$  konstant sind, lineare Beziehungen zwischen dem Konzentrations- und Geschwindigkeits- bzw. zwischen dem Gesamtenthalpie- und Geschwindigkeitsprofil bestehen. Diese Beziehungen, die die notwendigen Randbedingungen (3.7) und (3.8) erfüllen, sind

$$\frac{c_1}{c_{1w}} = 1 - \frac{u}{u_a} \quad (5.8)$$

und

$$\frac{H}{H_a} = \mathcal{H} \left( 1 - \frac{u}{u_a} \right) + \frac{u}{u_a} \quad (5.9)$$

mit

$$\mathcal{H} = \frac{H_w}{H_a} = \frac{(T_w/T_a)(1 + C)}{1 + [(\gamma - 1)/2] Ma_a^2}. \quad (4.8d)$$

Aus (5.8), (5.9) und (4.8d) wird klar, dass die Konzentration des Fremdgases die Geschwindigkeits- und Enthalpieprofile beeinflusst.

Aus (5.9) erhalten wir mit Hilfe von (3.16) folgende Beziehung zwischen Temperatur und Geschwindigkeit:

$$\frac{T}{T_a} = \frac{(T_w/T_a)(1 + C)(1 - u/u_a) + [(\gamma - 1)/2] Ma_a^2 (u/u_a)(1 - u/u_a) + u/u_a}{1 + C(1 - u/u_a)}. \quad (5.10)$$

Diese Beziehung wurde auf anderem Wege auch von J. R. Baron [2] erhalten.

Für den Fall einer reinen Luftströmung ( $c_{p1} = c_{p2}$ , d.h.  $C = 0$ ) reduziert sich die Gleichung (5.10) auf das bekannte Ergebnis (S. 326, H. Schlichting [7]):

$$\frac{T}{T_a} = \left(\frac{T_w}{T_a}\right)\left(1 - \frac{u}{u_a}\right) + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_a^2 \frac{u}{u_a} \left(1 - \frac{u}{u_a}\right) + \frac{u}{u_a}. \quad (5.11)$$

Da die Prandtl- und Schmidtzahl im gesamten Strömungsfeld den Wert 1 haben, schliessen die Gleichungen (4.8r) und (4.8s) ein, dass

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_2 = 0 \\ \varepsilon_3 &= c_{p12} - 1 \\ \varepsilon_4 &= Q \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

und

Daher erhalten wir aus (4.8)

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= (c_{p12} - 1)/(1 + C) \\ \alpha_2 &= \beta_1 = \beta_2 = \beta_6 = \frac{Q}{1 + Qc_{1w}} \\ \beta_3 &= \beta_4 = \beta_5 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

und

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= -\alpha(1 - c_{1w}) \\ d_2 &= Pd_1/2 \\ e_2 &= Pe_1/2. \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

Es kann leicht geprüft werden, dass die Wandbindungen (4.1) bis (4.3) in diesem Fall identisch sind. Wir folgern aus (5.8) und (5.9), dass die Koeffizienten von  $\eta^5$  in dem Konzentrations- bzw. Gesamtenthalpieprofil verschwinden müssen, d.h.

$$6c_{1w} + 3d_1 + d_2 = 0 \quad (5.15)$$

und

$$6(\mathcal{H} - 1) + 3e_1 + e_2 = 0. \quad (5.16)$$

Setzen wir die Werte  $d_1$ ,  $d_2$  und  $e_2$  aus Gleichung (5.14) in (5.15) und (5.16) ein, erhalten wir

$$\alpha = \frac{12c_{1w}}{D(1 - c_{1w})} \quad (5.17)$$

und

$$e_1 = \frac{12}{D}(1 - \mathcal{H}). \quad (5.18)$$

Daher ist es in diesem Fall ausreichend, nur eine Gleichung zu lösen, nämlich die Impulsgleichung (5.5), die sich mit Hilfe von (5.8) reduziert auf

$$\frac{1}{2}F_1\lambda' + \lambda F_1' = \frac{\varphi\sqrt{\lambda}}{c_{1w}}. \quad (5.19)$$

Aus (4.8a) folgt jedoch:

$$\varphi(\sqrt{\lambda}) = \frac{\rho_w \mu_w}{\rho_a \mu_a} \alpha. \quad (5.20)$$

Wenn wir die Werte von  $\alpha$ ,  $\rho_w/\rho_a$  und  $\mu_w/\mu_a$  aus (5.17) bzw. aus (2.1) und (2.4) in (5.20) einsetzen und in Beziehung setzen zu (5.13), erhalten wir

$$\frac{\varphi\sqrt{\lambda}}{c_{1w}} = \frac{12K}{D(1 - c_{1w})(1 + Qc_{1w})}. \quad (5.21)$$

Den Wert von  $P$  aus (4.8m) kann man mit Hilfe von (5.13) und (5.17) erhalten, indem man die quadratische Gleichung

$$P(P + 6) = \frac{12c_{1w}}{1 - c_{1w}} \left[ 1 - \frac{Q}{1 + Qc_{1w}} (1 - c_{1w}) \right] \quad (5.22)$$

löst.

Aus (5.21) und (5.22) erkennen wir, wenn  $c_{1w} = \text{konst.}$  ist, dass  $\varphi\sqrt{\lambda}$  und  $P$  ebenfalls Konstante sind und deswegen die Funktion  $F_1$  konstant ist.

Daher erhält man, wenn die Gleichung (5.19) mit der Anfangsbedingung  $\xi = 0$ ,  $\lambda = 0$  integriert wird,

$$\frac{\lambda}{\xi} = \frac{24K}{D(1 - c_{1w})(1 + Qc_{1w})} \frac{1}{F_1}. \quad (5.23)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (3.11) kann man aus (5.21) und (5.23) leicht sehen, dass in diesem Fall die Ausblasesgeschwindigkeit umgekehrt proportional zur Quadratwurzel der Entfernung ist. Also ist bei einer konstanten Konzentration an der Wand (vorgegeben) und konstanter Wandtemperatur  $v_w \sim x^{-\frac{1}{2}}$ .

### 5.3 Reduzierter Mengenbeiwert des Ausblasens

Wie in Abschnitt 3.2 betont, sind die Ausblasesgeschwindigkeit und die Konzentration an der Wand voneinander abhängig, und es ergibt sich im vorliegenden Fall, dass diese Abhängigkeit durch die Beziehung (5.21) gegeben ist. Um diese Abhängigkeit ausdrücklich zu beweisen, führen wir einen reduzierten Mengenbeiwert des Ausblasens  $f_w$  ein, der folgendermassen definiert ist:

$$f_w = - \frac{2\rho_w v_w}{\rho_\infty u_\infty} \sqrt{\left( \frac{Re_x}{K} \right)} \quad (5.24)$$

und der sich mit Hilfe von (3.11) zu

$$f_w = -2\varphi(\sqrt{\lambda}) \sqrt{\left( \frac{\xi}{\lambda K} \right)} \quad (5.25)$$

reduziert.

Setzt man die Werte von  $\varphi\sqrt{\lambda}$  und  $\lambda/\xi$  aus (5.21) bzw. (5.23) in (5.25) ein, erhält man schliesslich

$$f_w = -c_{1w} \left[ \frac{24F_1}{D(1 - c_{1w})(1 + Qc_{1w})} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.26)$$

Somit kann für ein gegebenes  $f_w$  der Wert von  $c_{1w}$  nach der "Regula Falsi" leicht aus (5.26) errechnet werden.

#### 5.4 Berechnung der charakteristischen Grenzschicht-Parameter

Aus (4.22) und (5.23) ergibt sich die dimensionslose Verdrängungsdicke

$$\frac{\delta^*}{x} \sqrt{\left(\frac{Re_x}{K}\right)} = \left[ \frac{24}{D(1 - c_{1w})(1 + Qc_{1w}) F_1} \right]^{\frac{1}{2}} (F_2 + QF_6 - F_1). \quad (5.27)$$

Setzt man die Werte von  $\lambda/\xi$  aus (5.23) in (4.23) ein, erhält man die dimensionslose Impulsverlustdicke

$$\frac{\vartheta}{x} \sqrt{\left(\frac{Re_x}{K}\right)} = \left[ \frac{24F_1}{D(1 - c_{1w})(1 + Qc_{1w})} \right]^{\frac{1}{2}} = -\frac{f_w}{c_{1w}}. \quad (5.28)$$

Wenn man die Werte von  $\alpha$ ,  $\varphi\sqrt{\lambda}$  und  $\lambda/\xi$  aus (5.17), (5.21) und (5.23) in (4.25) einsetzt, erhält man den örtlichen Reibungsbeiwert

$$c_f \sqrt{\left(\frac{Re_x}{K}\right)} = \left[ \frac{24(1 - c_{1w}) F_1}{D(1 + Qc_{1w})} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.29)$$

Aus (5.26) und (5.29) ergibt sich die Beziehung zwischen dem reduzierten Mengenbeiwert des Ausblasens und dem örtlichen Reibungsbeiwert

$$\frac{v_w \rho_w}{u_\infty \rho_\infty} \sqrt{\left(\frac{Re_x}{K}\right)} = \left( \frac{c_{1w}}{1 - c_{1w}} \right) \frac{1}{2} c_f \sqrt{\left(\frac{Re_x}{K}\right)} \quad (5.30)$$

Aus (5.25) und (4.27) ist die örtliche Stantonzahl des Massenübergangs gegeben durch

$$St_m \sqrt{\left(\frac{Re_x}{K}\right)} = -f_w/2c_{1w}$$

die sich mit Hilfe von (5.30) auf

$$St_m \sqrt{\left(\frac{Re_x}{K}\right)} = \frac{1}{2(1 - c_{1w})} c_f \sqrt{\left(\frac{Re_x}{K}\right)} \quad (5.31)$$

reduziert.

Setzt man die Werte von  $\varphi\sqrt{\lambda}$ ,  $\alpha$ ,  $e_1$  und  $\lambda/\xi$  aus (5.21), (5.17), (5.18) und (5.23) in (4.31) ein, so folgt

$$St_h \sqrt{\left(\frac{Re_x}{K}\right)} = \frac{1}{2} c_f \sqrt{\left(\frac{Re_x}{K}\right)}. \quad (5.32)$$

Die Beziehung (5.32) ist die bekannte Reynoldssche Analogie.

#### 5.5 Numerische Diskussion

In Bild 1 wird ein Vergleich des Reibungsbeiwertes als Funktion der dimensionslosen Ausblasegeschwindigkeit für verschiedene Molekularmassenverhältnisse 1 bis 4 mit der numerischen Lösung von C. R. Faulders [28] gemacht. Es zeigt sich, dass die Übereinstimmung für die zunehmenden Molekularmassenverhältnisse, d.h. für das Einblasen von Leichtgasen, sehr zufriedenstellend ist. Aber man muss im Auge behalten, dass in der vorliegenden Analyse eine realistischere Temperatur-Zähigkeits-Beziehung genommen wurde (d.h. im Hinblick auf den Sutherlandschen

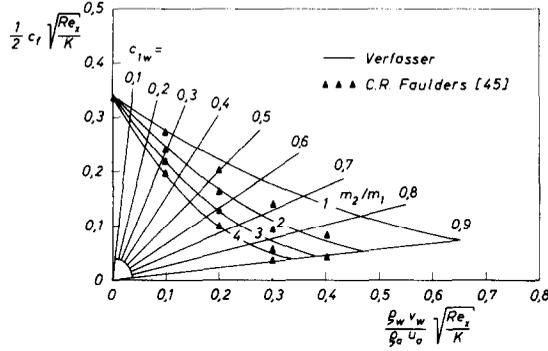


BILD 1. Örtlicher Reibungsbeiwert für verschiedene Massenverhältnisse und Konzentrationen an der Wand für eine laminare Grenzschicht mit Einblasen eines Fremdgases.

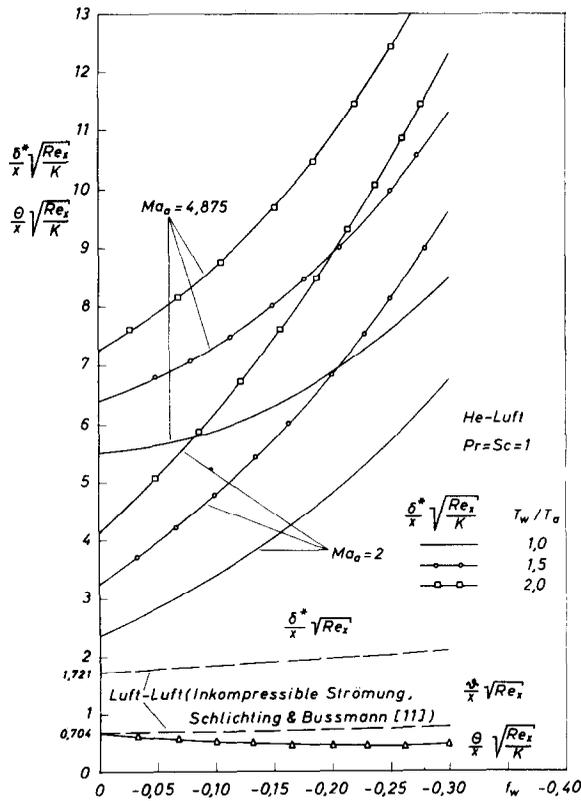


BILD 2. Wirkung der Injektion von Helium auf die dimensionslose Impulsverlust- und Verdrängungsdicke für verschiedene Werte des Injektionsparameters  $f_w$  ( $Pr = Sc = 1$ ).

Parameter  $K$ ), während in Faulders Analysis der Wert von  $K$  gleich eins genommen ist. Die Linien von konstanter Konzentration an der Wand sind in Bild 1 ebenfalls bezeichnet.

In Bild 2 ist die dimensionslose Verdrängungs- und Impulsverlustdicke als Funktion des reduzierten Mengenbeiwertes des Ausblasens für verschiedene Werte der Wandtemperatur und der Machzahlen aufgetragen. Um die Auswirkung des Einblasens von Helium und der Kompressibilität auf obige Größen zu sehen, sind auch die Verdrängungs- und Impulsverlustdicke in einer inkompressiblen Strömung für Einblasen von Luft nach Schlichting und Bussmann [5] in Bild eingezeichnet. Man kann aus der Gleichung (5.28) sehen, dass die Impulsverlustdicke unabhängig von der Änderung der Wandtemperatur und der Machzahlen ist. (Jeder Temperatureinfluss ist völlig in der Konstante  $K$  enthalten.) Mit zunehmendem Mengenbeiwert des Einblasens von Helium nimmt die Impulsverlustdicke zuerst auf ein Minimum ab und dann wieder zu, während im Fall des Einblasens von Luft die Impulsverlustdicke kontinuierlich wächst. Wenn wir die Gleichung (5.28) in Beziehung zu Gleichung (5.26) näher betrachten, bemerken wir, dass mit wachsendem Mengenbeiwert des Einblasens die Konzentration an der Wand erst schnell zunimmt; darauf ist die Zunahme langsamer und nähert sich einem asymptotischen Wert. Dieser Umstand ist die Ursache für die Änderung der Impulsverlustdicke. Die Auswirkung der Änderung der Machzahl und Wandtemperatur auf die Verdrängungsdicke ist dieselbe, d.h. die Verdrängungsdicke nimmt zu mit der Steigerung der Temperatur und der Machzahl. Die physikalische Bedeutung dieses Phänomens ist, dass die Zunahme der dimensionslosen Verdrängungsdicke, die mit der Steigerung der Machzahl geändert wird, hauptsächlich von der Volumenvergrößerung abhängt, die mit der Temperatursteigerung des Heliums in der Nähe der Wand verbunden ist.

## 6. ÜBERSCHALLSTRÖMUNG AN EINER PLATTE MIT VERÄNDERLICHER AUSBLASEGESCHWINDIGKEIT UND BELIEBIGEN PRANDTLSCHEN UND SCHMIDTSCHEN ZAHLEN

### 6.1 Einführung

In dem vorliegenden Kapitel wird die Grenzschicht mit konzentrationsabhängigen beliebigen Prandtlschen und Schmidtschen Zahlen für eine Überschallströmung an einer ebenen Platte unter dem Einfluss des Ausblasens eines Fremdgases untersucht. Diese Lösung ist schwieriger im Vergleich zu dem Fall  $Pr = Sc = 1$ , weil im vorliegenden Fall die drei Gleichungen für Impuls, Energie und Konzentration nicht auf eine einzige Gleichung zurückgeführt werden können und die Wandbindungen auch gekoppelt sind, wie man in (4.1) bis (4.4) sehen kann.

In dem vorliegenden Fall werden die Gleichungen (3.12) bis (3.14) reduziert auf:

Impuls

$$\frac{1}{2}F_1\lambda' + \lambda F_1' = \varphi(\sqrt{\lambda}) + \frac{\rho_w \mu_w}{\rho_a \mu_\infty} F_3 \quad (6.1)$$

Energie

$$\frac{1}{2}F_4\lambda' + \lambda F_4' = \varphi(\sqrt{\lambda}) \left\{ (1 - \mathcal{H}) + \mathcal{H} (1 - c_{1w}) \alpha_1 \left( \frac{Sc_w}{Pr_w} - 1 \right) \right\} + \frac{\rho_w \mu_w}{\rho_a \mu_\infty} \frac{1}{Pr_w} F_5 \quad (6.2)$$

und

Konzentration

$$\frac{1}{2}F_7\lambda' + \lambda F_7' = \varphi \sqrt{\lambda}. \quad (6.3)$$

Obwohl die Gleichungen (6.1) und (6.3) den Gleichungen (5.1) und (5.3) genau entsprechen, gibt es hier keine einfache Beziehung wie (5.7), weil die Schmidtsche Zahl im Strömungsfeld notwendigerweise nicht 1 ist. Aus (6.1) bis (6.3) geht hervor, dass die Geschwindigkeits- und Diffusionsfelder vom Enthalpiefeld unabhängig sind. Daher werden die beiden Strömungsgleichungen (6.1) und (6.3) zuerst gelöst, und das Ergebnis kann verwendet werden, um das Gesamtenthalpiefeld zu berechnen.

Eine exakte (numerische) Lösung für obigen Fall ist von mehreren in der Einleitung erwähnten Forschern unter verschiedenen Einschränkungen gefunden worden. Die Untersuchungen von Baron [2] und Wuest [3, 16] sind besonders beachtenswert.

In dem nächsten Abschnitt werden wir ein Näherungsverfahren, das den Vorteil der Einfachheit und Geschlossenheit hat, betrachten und werden die Ergebnisse, soweit wie möglich, mit den numerischen Lösungen vergleichen.

## 6.2 Lösung der Impuls- und Konzentrationsgleichungen

Die Ausblasegeschwindigkeit sei so vorgegeben, dass

$$\varphi(\sqrt{\lambda}) = N = \text{konst.} \quad (6.4)$$

(im weiteren Verlauf werden wir sehen, dass  $v_w \sim x^{-\frac{1}{2}}$  ist). Wenn wir die Werte von  $\rho_w/\rho_a$ ,  $\mu_w/\mu_a$  und  $\varphi\sqrt{\lambda}$  aus (2.1) bzw. (2.4) bzw. (6.4) in (4.8a) einsetzen, erhalten wir

$$\alpha(c_{1w}) = \frac{N(1 + Qc_{1w})}{K(1 + \varepsilon_1 c_{1w} + \varepsilon_2 c_{1w}^2)}. \quad (6.5)$$

Aus (4.8m) ergab sich bereits:

$$P = \alpha[1 - \beta_1(1 - c_{1w})Sc_w]. \quad (4.8m)$$

Da  $\alpha$ ,  $Sc_w$  und  $\beta_1$  Funktionen der Konzentration an der Wand ( $c_{1w}$ ) sind, schliessen wir

$$P = P(c_{1w}). \quad (6.6)$$

Daher sind die Funktionen  $F_1$ ,  $F_3$  und  $F_7$ , die durch (4.14), (4.16) bzw. (4.20) gegeben sind, nur Funktionen von  $c_{1w}$ , nachdem  $A = 0$  eingesetzt worden ist.

Mit Hilfe von (6.4) bis (6.6) reduzieren sich die Impuls- und Konzentrationsgleichungen auf

$$\frac{1}{2} F_1 \frac{d\lambda}{d\xi} + \lambda \frac{dF_1}{dc_{1w}} \frac{dc_{1w}}{d\xi} = N \left( 1 + \frac{F_3}{\alpha} \right) \quad (6.7)$$

und

$$\frac{1}{2} F_7 \frac{d\lambda}{d\xi} + \lambda \frac{dF_7}{dc_{1w}} \frac{dc_{1w}}{d\xi} = N. \quad (6.8)$$

Aus (6.7) und (6.8) erhalten wir

$$\frac{d\lambda}{d\xi} = \chi_1(c_{1w}, N) \quad (6.9)$$

und

$$\frac{d}{d\xi}(\lambda c_{1w}) = \chi_2(c_{1w}, N), \quad (6.10)$$

wobei

$$\chi_1(c_{1w}, N) = 2N \left[ \frac{dF_7}{dc_{1w}} - \frac{dF_1}{dc_{1w}} + \frac{F_3}{\alpha} \frac{dF_7}{dc_{1w}} \right] \left/ \left( F_1 \frac{dF_7}{dc_{1w}} - F_7 \frac{dF_1}{dc_{1w}} \right) \right. \quad (6.11)$$

und

$$\chi_2(c_{1w}, N) = c_{1w} \chi_1(c_{1w}, N) + 2N \left[ (F_1 - F_7) - \frac{F_3 F_7}{\alpha} \right] \left/ \left( F_1 \frac{dF_7}{dc_{1w}} - F_7 \frac{dF_1}{dc_{1w}} \right) \right. \quad (6.12)$$

Die Gleichungen (6.9) und (6.10) sind mit den Anfangsbedingungen eines endlichen  $c_{1w}$  bei  $\xi = 0$ ,  $\lambda = 0$  zu integrieren. Die Integration geschieht am besten durch sukzessive Approximation, indem man zunächst  $c_{1w} = \text{konst.}$  setzt. Dies ergibt

$$\lambda = \chi_1(c_{1w}, N) \xi \quad (6.13)$$

und

$$\lambda = \chi_2(c_{1w}, N) \xi \quad (6.14)$$

Aus (6.13) und (6.14) folgt

$$c_{1w} = \frac{\chi_2(c_{1w}, N)}{\chi_1(c_{1w}, N)} \quad (6.15)$$

Die Gleichung (6.15) zeigt, dass  $c_{1w}$  unabhängig von  $\xi$  ist und deshalb eine Konstante ist. Daher ist die erste Approximation die exakte Lösung aus (6.9) und (6.10), und eine weitere Approximation ist nicht erforderlich.

Aus (6.15) und (6.12) erhalten wir

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{F_3 F_7}{F_1 - F_7} \\ &= \alpha(c_{1w}, N). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Die Gleichung (6.16) ist eine implizite Beziehung zwischen  $c_{1w}$  und  $\alpha$  und kann mit Hilfe des "Wegesteinschen iterativen Verfahrens" gelöst werden. Die Werte sind in Tabelle 2 aufgeführt.

Da  $c_{1w}$  konstant ist, erhalten wir aus (6.9) unter Anwendung von (6.16)

$$\frac{\lambda}{\xi} = \frac{2N}{F_7} \quad (6.17)$$

Dieselbe Beziehung können wir auch direkt aus (6.8) ableiten. Aus (6.4) und (6.17) können wir unter Anwendung von (3.11) leicht einsehen, dass in diesem Fall  $v_w \sim x^{-\frac{1}{2}}$  ist.

Der Mengenbeiwert des Ausblasens ( $f_w$ ), der durch (5.24) oder (5.25) definiert ist, reduziert sich mit Hilfe von (6.4) und (6.17) zu

$$f_w = - \left[ 2F_7 \left( \frac{N}{K} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.18)$$

wobei  $(N/K)$  durch (6.5) gegeben ist.

Eine Kontrolle ist dadurch möglich, dass für  $Sc = 1$  der Wert  $F_7 = c_{1w}F_1$  wird und sich die Beziehungen (6.16), (6.17) und (6.18) genau zu (5.17), (5.23) bzw. (5.26) reduzieren.

Unter dem Gesichtspunkt der numerischen Rechnung ist es in der vorliegenden Analyse empfehlenswert, eher die Wandkonzentration als den Mengenbeiwert des Ausblasens vorzugeben. Daraus schliessen wir, dass bei einer vorgegebenen Wandkonzentration  $c_{1w}$  der Wert von  $\alpha$  aus (6.16) durch die Anwendung des Wegesteinschen iterativen Verfahrens ermittelt werden kann, worauf der Mengenbeiwert des Ausblasens und die Unbekannten  $d_1$  und  $\lambda$  leicht aus (6.18), (4.8o) bzw. (6.17) errechnet werden können.

### 6.3 Lösungsverfahren der Energiegleichung

Die Energiegleichung lautet:

$$\frac{1}{2}F_4\lambda' + \lambda F_4' = \varphi(\sqrt{\lambda}) \left\{ (1 - \mathcal{H}) + \mathcal{H}(1 - c_{1w})\alpha_1 \left( \frac{Sc_w}{Pr_w} - 1 \right) \right\} + \frac{\rho_w \mu_w}{\rho_a \mu_\infty} \frac{1}{Pr_w} F_5. \quad (6.2)$$

Aus (4.17) kann die Funktion  $F_4$  wie folgt ausgedrückt werden

$$F_4 = g_1(P, c_{1w}, \mathcal{H}) - e_1 g_2(P, c_{1w}), \quad (6.19)$$

wobei

$$g_1(P, c_{1w}, \mathcal{H}) = \frac{1}{D} \left[ (1,45714 + 0,16904 P)(1 - \mathcal{H}) - \frac{1}{2}(0,06904 + 0,00912 P) \times \left( \frac{144\beta_3}{D^2} + 2\beta_4 d_2 - \beta_5 d_1^2 \right) \right] \quad (6.20)$$

und

$$g_2(P, c_{1w}) = \frac{1}{D} [(0,37618 + 0,04761 P) + \frac{1}{2}(0,06904 + 0,00912 P) \cdot (\alpha Pr_w + \beta_2 d_1)]. \quad (6.21)$$

Wenn wir  $\lambda/\xi$  und  $F_4$  aus (6.17) und (6.19) in (6.2) einsetzen und die Beziehungen von (6.4), (4.8a) und (6.16) anwenden, erhalten wir

$$(g_1 - e_1 g_2) \frac{N}{F_7} - \frac{2N}{F_7} \xi g_2 \frac{de_1}{d\xi} = N \left\{ (1 - \mathcal{H}) + \mathcal{H}(1 - c_{1w})\alpha_1 \left( \frac{Sc_w}{Pr_w} - 1 \right) + \frac{F_1 - F_7}{F_3 F_7} \frac{1}{Pr_w} e_1 \right\}. \quad (6.22)$$

Die Gleichung (6.22) kann auch geschrieben werden als

$$\xi \frac{de_1}{d\xi} + \left( \frac{g_2 + g_4}{2g_2} \right) e_1 = \frac{g_1 - g_3 F_7}{2g_2}. \quad (6.23)$$

wobei

$$g_3(c_{1w}, \mathcal{H}) = (1 - \mathcal{H}) + \mathcal{H}(1 - c_{1w})\alpha \left( \frac{Sc_w}{Pr_w} - 1 \right) \quad (6.24)$$

und

$$g_4(c_{1w}) = \frac{1}{Pr_w} \frac{F_1 - F_7}{F_3}. \quad (6.25)$$

Die Gleichung (5.23) ist eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung erster Ordnung, und ihre Lösung lautet mit der Anfangsbedingung eines endlichen  $e_1$  bei

$\xi = 0$ :

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{g_1 - g_3 F_7}{g_2 + g_4} \\ &= e_1(c_{1w}, \mathcal{H}). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Zur Kontrolle kann man nach einigen Zwischenrechnungen feststellen, dass für  $Pr = Sc = 1$  ( $F_4 = (1 - \mathcal{H})F_1$ ,  $F_7 = c_{1w}F_1$ ,  $g_3 = (1 - \mathcal{H})$  und  $g_4 = (1 - c_{1w})F_1/F_3$ ) die Gleichung (6.26) sich exakt auf (5.18) reduziert.

Daher können einem vorgegebenen Wert der Wandkonzentration ( $c_{1w}$ ) und einem vorgegebenen Wert  $T_w/T_\infty$  des Verhältnisses der Wandtemperatur zur Temperatur ausserhalb der Grenzschicht die Werte  $g_1$  bis  $g_4$  und  $F_7$  zugeordnet werden, und es ergibt sich  $e_1$  aus (6.26).

#### 6.4 Berechnung der charakteristischen Grenzschicht-Parameter

Nachdem die Werte der unbekannt Parameter  $\lambda$ ,  $d_1$  und  $e_1$  bestimmt wurden, können die charakteristischen Grenzschichtparameter berechnet werden.

Substituieren wir  $\varphi\sqrt{\lambda}$ ,  $\alpha$  und  $\lambda/\xi$  aus (6.4), (6.16) bzw. (6.17) in (4.25), so erhalten wir nach einigen Umformungen den örtlichen Reibungsbeiwert

$$c_f \sqrt{\left(\frac{Re_x}{K}\right)} = (F_1 - F_7) \sqrt{\left(\frac{2N}{F_7 K}\right)}. \quad (6.27)$$

Mit (6.18) und (6.27) folgt für die Beziehung zwischen dem Mengenbeiwert des Ausblasens und dem Reibungsbeiwert:

$$\frac{v_w \rho_w}{u_\infty \rho_\infty} \sqrt{\left(\frac{Re_x}{K}\right)} = \frac{F_7}{F_1 - F_7} \frac{1}{2} c_f \sqrt{\left(\frac{Re_x}{K}\right)}. \quad (6.28)$$

Als Rechenkontrolle findet man, dass für  $Pr = Sc = 1$  die Beziehung  $F_7 = c_{1w}F_1$  wird und die Formel (6.28) exakt mit (5.30) übereinstimmt.

Aus (4.27) und (6.17) ergibt sich die örtliche Stantonzahl für den Massenübergang zu

$$St_m \sqrt{\left(\frac{Re_x}{K}\right)} = \frac{1}{2c_{1w}} \sqrt{\left(2F_7 \frac{N}{K}\right)} = \frac{1}{2c_{1w}} \frac{F_7}{F_1 - F_7} c_f \sqrt{\left(\frac{Re_x}{K}\right)} = -\frac{1}{2} \frac{f_w}{c_{1w}}. \quad (6.29)$$

Für sehr kleine Werte des Mengenbeiwerts (d.h.  $f_w \rightarrow 0$ ) geht  $c_{1w} \rightarrow 0$  und die Gleichung (6.29) wird unbestimmt. Bilden wir den Grenzwert, so bleibt, wie wir noch sehen werden, der physikalische Massentransport, wie zu erwarten war, bestimmt.

Z.B. wird für Helium-Einblasen:

$$\begin{aligned} \lim_{c_{1w} \rightarrow 0} St_m \sqrt{\left(\frac{Re_x}{K}\right)} &= \lim_{c_{1w} \rightarrow 0} \frac{1}{2} c_f \sqrt{\left(\frac{Re_x}{K}\right)} \frac{(F_7/c_{1w})}{(F_1 - F_7)} \\ &= \left[ \frac{1}{2} c_f \sqrt{\left(\frac{Re_x}{K}\right)} \frac{1}{(F_1 - F_7)} \right]_{c_{1w}=0} \lim_{c_{1w} \rightarrow 0} (F_7/c_{1w}) \\ &= 0,564028. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Nach (4.29) gilt für die Gleichgewichtstemperatur

$$\frac{T_r}{T_a} = - \left[ \frac{\{1 + [(\gamma - 1)/2] Ma_a^2\} e_1}{(c_{p12} - 1) \alpha (1 - c_{1w}) Sc_w} \right]_{T_w = T_r} \quad (4.29)$$

Wie man aus (6.26) sehen kann, ist  $\mathcal{H}$  in impliziter Form in  $e_1$  enthalten und daher auch  $T_w$ . Um die Lösung der Gleichung (4.29) zu vereinfachen, müssen wir noch eine explizite Beziehung für die Gleichgewichtstemperatur  $T_r$  finden.

Da  $P$  eine Funktion von  $c_{1w}$  ist, lässt sich die durch (6.20) definierte Funktion  $g_1(P, c_{1w}, \mathcal{H})$  folgendermassen schreiben:

$$g_1(P, c_{1w}, \mathcal{H}) = q_1(c_{1w}) - \mathcal{H} q_2(c_{1w}), \quad (6.31)$$

wobei

$$q_1 = \frac{1}{D} \left[ (1,45714 + 0,16904 P) - \frac{72 \beta_3}{D^2} (0,06904 + 0,00912 P) \right] \quad (6.32)$$

und

$$q_2 = \frac{1}{D} \left[ (1,45714 + 0,16904 P) + \frac{1}{2} (0,06904 + 0,00912 P) \right. \\ \left. \left\{ 2\alpha_1 \left( 1 - \frac{Pr_w}{Sc_w} \right) d_2 - \alpha_1 \left[ (\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_1 + \beta_6) \frac{Pr_w}{Sc_w} \right] d_1^2 \right\} \right] \quad (6.33)$$

ist.

Analog erhalten wir für  $g_3(c_{1w}, \mathcal{H})$ :

$$g_3(c_{1w}, \mathcal{H}) = 1 - \mathcal{H} q_3(c_{1w}), \quad (6.34)$$

wobei

$$q_3(c_{1w}) = 1 - (1 - c_{1w}) \alpha_1 \left( \frac{Sc_w}{Pr_w} - 1 \right) \quad (6.35)$$

ist.

Daher reduziert sich die Gleichung (6.26) auf

$$e_1 = \frac{(q_1 - F_7) - \mathcal{H}(q_2 - q_3 F_7)}{g_2 + g_4}. \quad (6.36)$$

Damit und mit (4.29) und (4.8d) gilt, nach einigen Umrechnungen, für die Gleichgewichtstemperatur  $T_r$ :

$$\frac{T_r}{T_a} = \frac{\{1 + [(\gamma - 1)/2] Ma_a^2\}}{1 + C} \frac{q_1 - F_7}{(q_2 - q_3 F_7) - \alpha \alpha_1 (1 - c_{1w}) (g_2 + g_4) Sc_w} \quad (6.37)$$

Der Temperaturrückgewinnfaktor ist definiert durch

$$r = \frac{T_r/T_a - 1}{[(\gamma - 1)/2] Ma_a^2}. \quad (4.30)$$

Er kann leicht berechnet werden, wenn man den Wert von  $T_r/T_a$  aus (6.37) in (4.30) einsetzt.

Mit der Substitution von  $\varphi\sqrt{\lambda}$  und  $\lambda/\xi$  in (4.31) ergibt sich nach einigen Umrechnungen für die örtliche Stantonzahl des Wärmeübergangs:

$$St_h \left( \frac{Re_x}{K} \right) = \frac{1}{2} c_f \sqrt{\left( \frac{Re_x}{K} \right) \frac{1}{Pr_w} \frac{1}{(T_r/T_a - T_w/T_a)} \frac{1}{F_3} \left[ e_1 \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_a^2 \right) + T_w/T_a (c_{p12} - 1) \alpha (1 - c_{1w}) Sc_w \right]} \quad (6.38)$$

wobei  $e_1$ ,  $T_r/T_a$  und  $\alpha$  durch (6.26), (6.37) bzw. (6.16) gegeben sind.

### 6.5 Numerische Diskussion

Die Abhängigkeit der Wandkonzentration von Oberflächenwerten der Prandtlschen und Schmidtschen Zahlen wird für das Helium-Einblasen in Bild 3 gezeigt und mit den Ergebnissen von

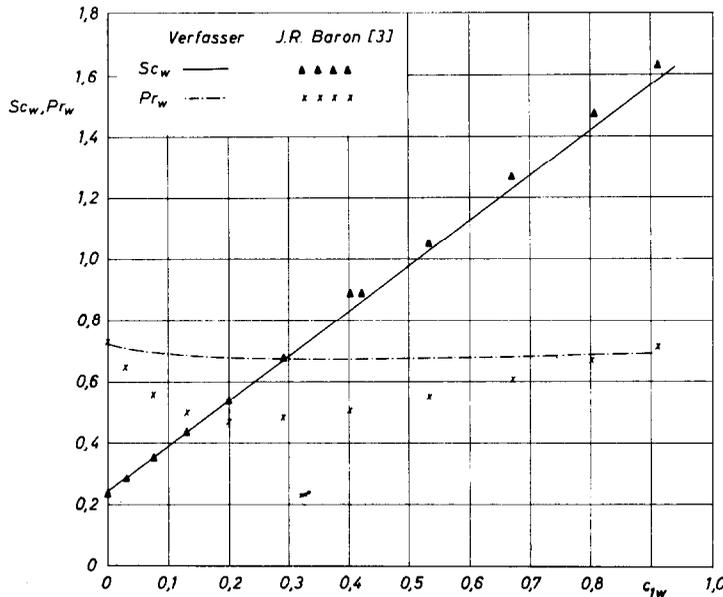


BILD 3. Abhängigkeit der Schmidt- und Prandtlzahlen an der Wand von der Heliumkonzentration an der Wand.

Baron [3] verglichen. Die Übereinstimmung in der Schmidtzahl ist gut, während die Übereinstimmung in der Prandtlzahl schlecht ist. Aber man muss im Auge behalten, dass die Prandtlzahl, sowohl für Helium als auch für Luft, im reinen Zustand im Bereich von 0.72 liegt. Baron kommt zu dem überraschenden Ergebnis, dass der Wert von  $Pr_w$  zu einem Minimum von etwa 0,47 für  $c_{1w} \approx 0,2$  abnimmt, während wir im Gegensatz zu den Ergebnissen von Baron finden, dass die Änderung in  $Pr_w$  gering ist und der Wert von  $Pr_w$  nicht unter 0,675 abnimmt.

Die Änderung in dem Temperaturrückgewinnfaktor  $r$  mit Konzentration an der Wand wird in Bild 4 gezeigt. Der Wert  $r$  nimmt erst bis zu einem Minimum von 0,926 bei  $c_{1w} \approx 0,3$  ab und nimmt dann allmählich mit der wachsenden Konzentration an der Wand zu.

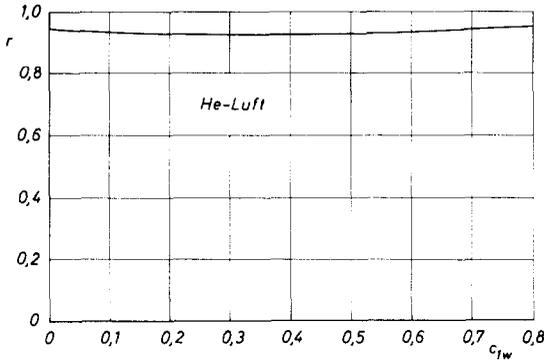


BILD 4. Wirkung der Heliumkonzentration an der Wand auf den Temperaturrückgewinnfaktor (Recovery-Faktor).

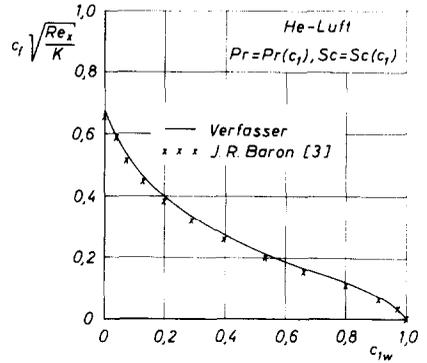


BILD 5. Abhängigkeit des örtlichen Beiwertes der Wandreibung von der Heliumkonzentration an der Wand.

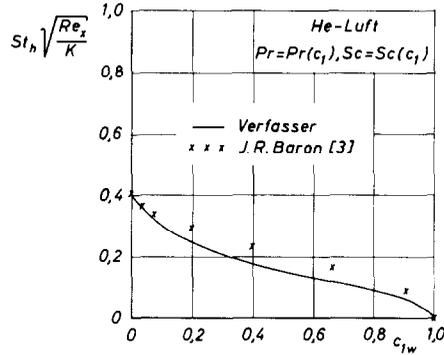


BILD 6. Abhängigkeit der örtlichen Stantonzahl für den Wärmeübergang von der Heliumkonzentration an der Wand.

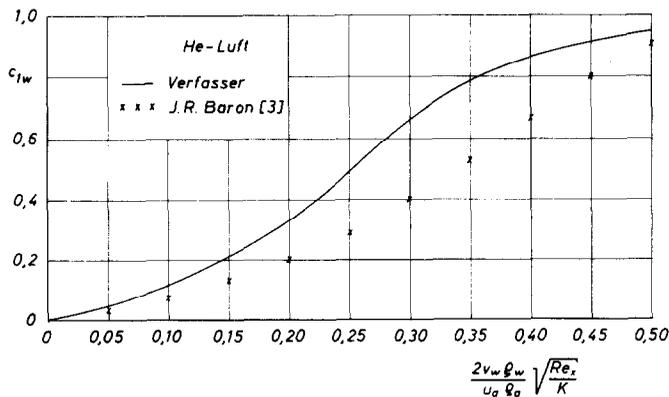


BILD 7. Wirkung des Injektionsparameters auf die Heliumkonzentration an der Wand.

In Bild 5 und 6 sind der Reibungsbeiwert und die Stantonzahl für den Wärmeübergang als Funktion der Wandkonzentration gezeichnet, und die Ergebnisse sind mit denen von Baron verglichen. Der Reibungsbeiwert stimmt gut überein, weil er unabhängig von der Prandtlzahl ist, während die Ergebnisse des Wärmeübergangs, der von der Prandtlzahl und dem Temperaturrückgewinnfaktor abhängig ist, nur annähernd übereinstimmen.

Auf Bild 7 ist die Auswirkung des Mengenbeiwertes auf die Wandkonzentration mit den Ergebnissen von Baron verglichen. In der vorliegenden Analyse ist der Wert der Wandkonzentration  $c_{1w}$  für einen gegebenen Mengenbeiwert höher als von Baron. Die direkte Folge dieser Nichtübereinstimmung lässt sich an der Stantonzahl des Massenübergangs bemerken, der in der vorliegenden Analyse einen niedrigen Wert für die gleiche Helium-Konzentration an der Wand (siehe Tabelle 2) erreicht.

Tabelle 2. Numerische Ergebnisse für die Plattengrenzschicht mit Ausblasen von Helium in Luft ( $v_w \sim x^{-1/2}$ )

$c_{1w}$	$\alpha$	$P$	$Pr_w$	$Sc_w$	$f_w$	$St_m \sqrt{\frac{Re_x}{K}}$	$c_j \sqrt{\frac{Re_x}{K}}$	$r$	$St_h \sqrt{\frac{Re_x}{K}}$
0	0	0	0,72000	0,24000	0	0,56403	0,68545	0,94693	0,40065
0,1	0,35126	-0,11050	0,69325	0,38950	-0,08675	0,43370	0,50314	0,93520	0,30104
0,2	0,74065	-0,11550	0,68266	0,53863	-0,14476	0,36190	0,39859	0,92844	0,24595
0,3	1,15537	-0,00079	0,67863	0,68739	-0,18860	0,31433	0,32652	0,92596	0,20825
0,4	1,58132	0,23927	0,67791	0,83582	-0,22348	0,27935	0,27181	0,92722	0,17890
0,5	2,01727	0,60545	0,67910	0,98390	-0,25286	0,25286	0,22771	0,93121	0,15405
0,6	2,49063	1,11053	0,68148	1,13166	-0,28064	0,23386	0,19015	0,93701	0,13167
0,7	3,07470	1,80994	0,68466	1,27910	-0,31208	0,22291	0,15595	0,94418	0,11029
0,8	3,95310	2,88001	0,68840	1,42624	-0,35622	0,22263	0,12177	0,95292	0,08821
0,9	5,82830	5,04515	0,69254	1,57307	-0,43979	0,24432	0,08198	0,96501	0,06186

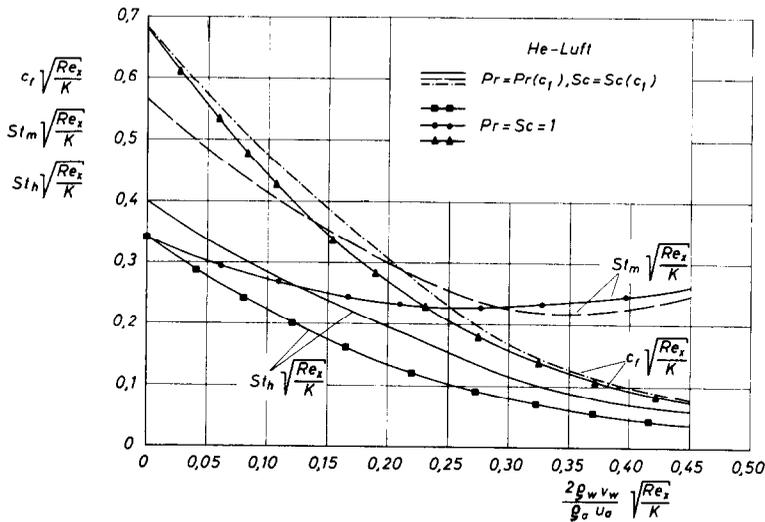


BILD 8. Abhängigkeit der Stantonzahl für den Wärmeübergang, der Stantonzahl für den Massenübergang und des Wandreibungskoeffizienten von der Heliuminjektion.

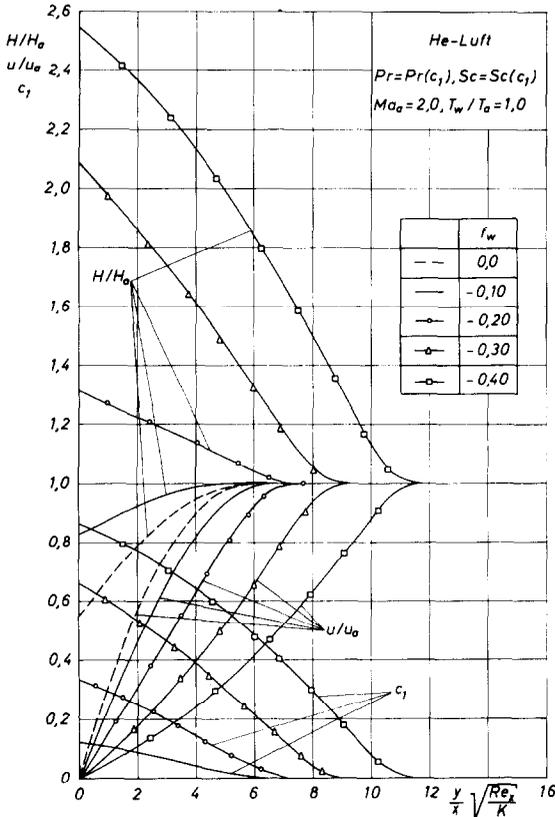


BILD 9. Wirkung der Heliuminjektion auf die Konzentrations-, Geschwindigkeits- und Ruheenthalpieprofile für konzentrationsabhängige Prandtl- und Schmidtzahlen.

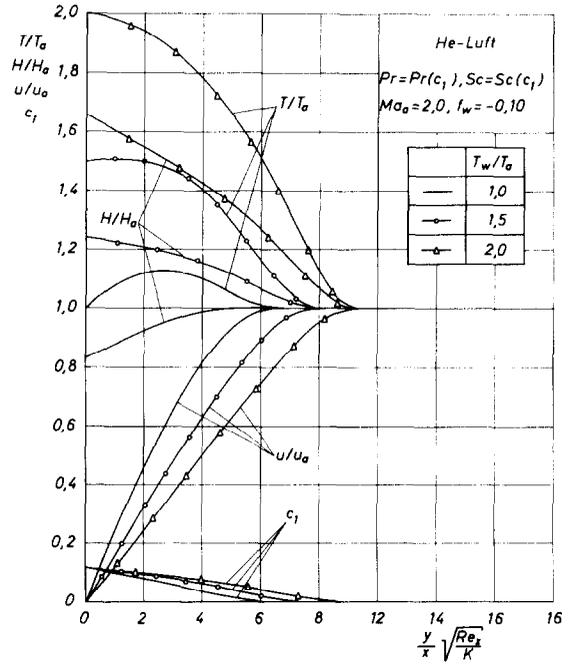


BILD 10. Wirkung der Heliuminjektion auf die Konzentrations-, Geschwindigkeits-, Ruheenthalpie- und Temperaturprofile für konzentrationsabhängige Prandtl- und Schmidtzahlen und für verschiedene Werte der Wandtemperatur.

Bei der Interpretation dieser Ergebnisse muss man daran erinnern, dass der hier verwendete Sutherlandsche Parameter ( $K$ ) eine Funktion der Wandkonzentration ist, während Baron [2] die Chapman-Rubesin-Konstante ( $C$ ) genommen hat, die nur für Luft-Luft-Strömung gilt.

In Bild 8 sind die Ergebnisse des Reibungsbeiwertes, der Stantonzahl des Massenübergangs und des Wärmeübergangs, als Funktion des Mengenbeiwertes mit der Analyse  $Pr = Sc = 1$  von Abschnitt 5 verglichen. Bei dem Vergleich dieser Ergebnisse spielt die Veränderung der Schmidtzahl an der Wand, die zwischen 0,24 und 1,8 liegt, eine sehr wichtige Rolle. Für kleine Mengenbeiwerte sind die hier erhaltenen Werte höher als die nach der Analyse  $Pr = Sc = 1$ . Aber für grosse Mengenbeiwerte nähern sich die Werte der Analyse  $Pr = Sc = 1$  an, weil die Schmidt- und Prandtlzahlen in der Nähe von 1 liegen. Für sehr hohe Mengenbeiwerte verschwinden die Werte des Reibungsbeiwertes und Wärmeübergangs in beiden Analysen asymptotisch, während die Stantonzahl für Massentransport zunimmt, wie man erwarten konnte.

Man muss beachten, dass die von der Prandtlzahl unabhängigen Reibungsbeiwert- und Massentransport Ergebnisse, wie sie von Baron für beliebige Schmidtzahl erhalten wurden, nicht völlig mit denen der Analyse  $Pr = Sc = 1$  übereinstimmen, wenn die variable Schmidtzahl sich 1 nähert.

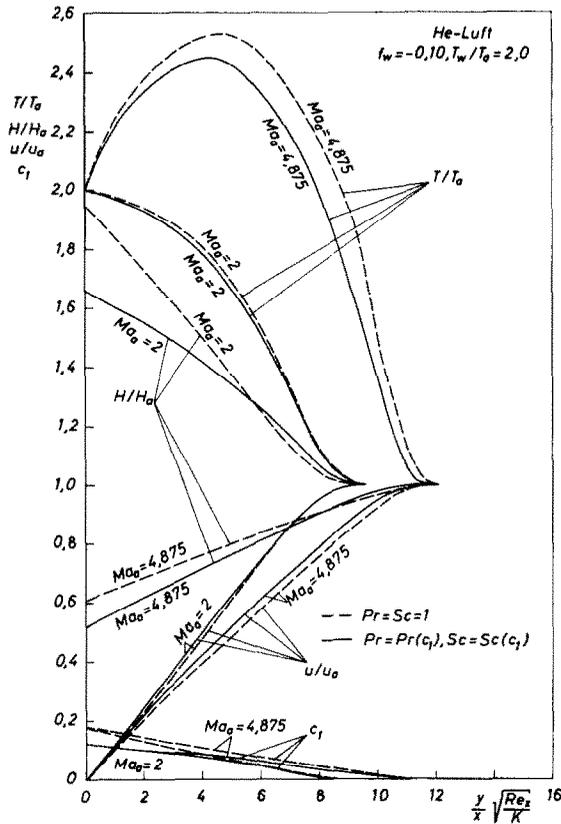


BILD 11. Vergleich der Konzentrations-, Geschwindigkeits-, Ruheenthalpie- und Temperaturprofile für konzentrationsabhängige Prandtl- und Schmidtzahlen mit der  $Pr = Sc = 1$  - Analyse.

In Bild 9 und 10 ist die Auswirkung des Mengenbeiwertes bzw. der Änderung der Wandtemperatur, auf die Konzentrations-, Geschwindigkeits-, Gesamtenthalpie- und Temperaturprofile, gezeichnet. Diese Profile sind für die Machzahlen 2,0 und 4,875 mit der Analyse  $Pr = Sc = 1$  in Bild 11 verglichen. Es zeigt sich, dass der grösste Unterschied in den Gesamtenthalpieprofilen vorhanden ist.

Bei den höheren Mengenbeiwerten ergibt sich der bekannte Wendepunkt im Geschwindigkeitsprofil. Dies ist bedeutungsvoll für den laminar-turbulenten Umschlag.

In Bild 12 sind die dimensionslose Verdrängungs- und Impulsverlustdicke als Funktion des Mengenbeiwertes für verschiedene Werte der Wandtemperatur und Machzahl dargestellt. Für zwei Machzahlen 2,0 und 4,875 sind die Ergebnisse der Verdrängungsdicke in Bild 13 mit der Analyse  $Pr = Sc = 1$  verglichen. Es zeigt sich, dass bei grösseren Machzahlen die Verdrängungsdicke beträchtlich von der Analyse  $Pr = Sc = 1$  abweicht.

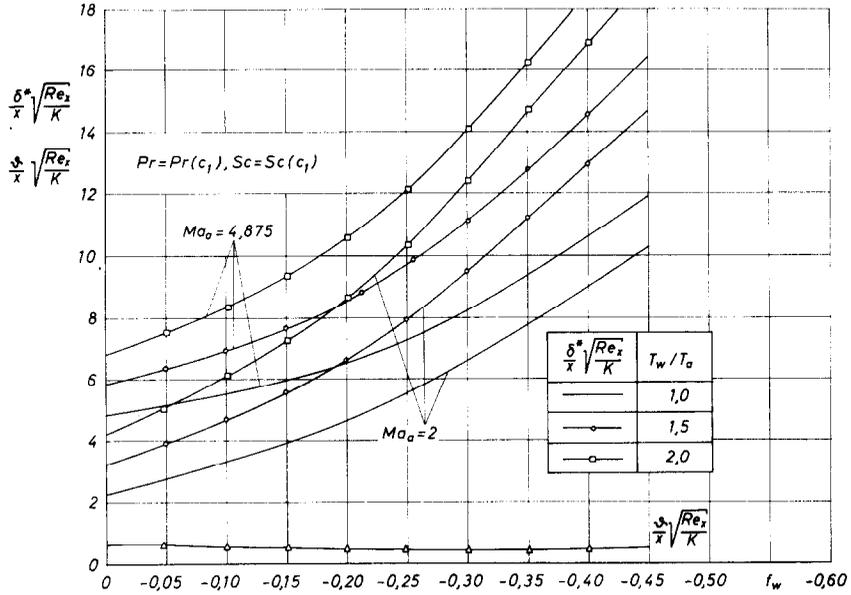


BILD 12. Wirkung der Heliuminjektion auf die dimensionlosen Impulsverlust- und Verdrängungsdicken für verschiedene Machzahlen und Wandtemperaturen.

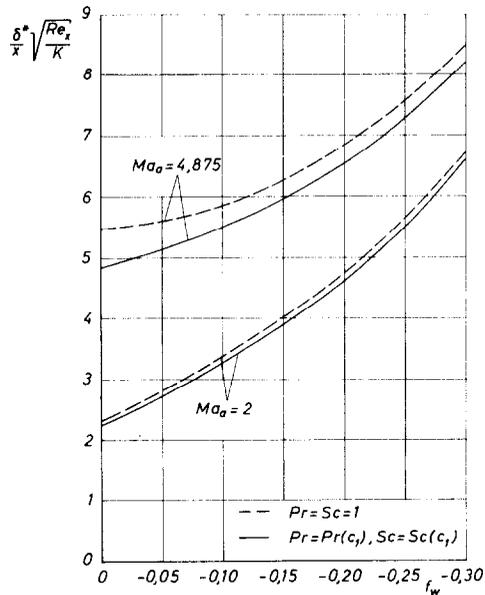


BILD 13. Vergleich der dimensionlosen Verdrängungsdicke für konzentrationsabhängige Prandtl- und Schmidtzahlen mit der  $Pr = Sc = 1$  - Analysis.

**7. ÜBERSCHALLSTRÖMUNG AN DER LÄNGSANGESTRÖMTEN EBENEN PLATTE MIT HOMOGENER AUSBLASEGESCHWINDIGKEIT UND BELIEBIGEN PRANDTLSCHEN UND SCHMIDTSCHEN ZAHLEN**

*7.1 Einführung*

Obwohl die exakte (numerische) Lösung der Zweistoffgrenzschichten für die Ausblasegeschwindigkeit  $v_w \sim x^{-\frac{1}{2}}$  von verschiedenen, schon in der Einleitung erwähnten Autoren gefunden wurden, ist das Problem des homogenen Ausblasens eines fremden Gases, das eine praktische Anwendung hat, bisher nicht gelöst. Die annähernde und exakte Lösung für Luft-Luft-Strömung, unter der beschränkten Bedingung, dass die Prandtlzahl gleich 1 ist, ist von Yuan [8] bzw. Lew und Fanucci [9] gefunden worden.

Im vorliegenden Kapitel ist eine Näherungslösung für eine kompressible Grenzschicht über einer ebenen Platte mit gleichmässiger Ausblasegeschwindigkeit ( $v_w = \text{konst.}$ ) eines beliebigen fremden Gases untersucht worden. Wie wir später sehen werden, gibt es in diesem Fall keine geschlossene Lösung der Grenzschichtgleichungen. Deshalb sind mit Hilfe der numerischen Methoden, wie der doppelt-genauen Runge-Kutta-Methoden, zuerst die Impuls- und Konzentrationsgleichungen, die unabhängig von dem Gesamtenthalpiefeld sind und darauthin die Energiegleichung gelöst worden, die das Gesamtenthalpiefeld bestimmt.

*7.2 Lösungsverfahren*

Wie vorher in Abschnitt 6 gezeigt worden ist, wird die Grenzschichtströmung der binären Mischung über einer ebenen Platte für beliebige Ausblasegeschwindigkeit und Prandtl- und Schmidtzahl durch die Gleichungen (6.1) bis (6.3) beschrieben.

In der Folge habe die Ausblasegeschwindigkeit  $v_w$  an der Platte einen konstanten Wert. Dann folgt aus (3.11)

$$\frac{\rho_a}{\rho_w} \varphi = \frac{v_w}{u_\infty} Re^{\frac{1}{2}} = \text{konst.} \tag{7.1}$$

Wir definieren die Variable  $\zeta$  statt  $\xi$ , so dass

$$\zeta = \left( \frac{\rho_a}{\rho_w} \varphi \right)^2 \xi = \frac{v_w^2 u_\infty x}{u_\infty v_\infty} \tag{7.2}$$

Aus (4.8a) folgt

$$\alpha^2 \frac{\mu_w^2}{\mu_\infty^2} = \left( \frac{\rho_a}{\rho_w} \varphi \right)^2 \lambda \tag{7.3}$$

In dieser Analyse ist es zweckmässig die Gleichungen (6.1) bis (6.3) mit  $\alpha(\xi)$  statt  $\lambda(\xi)$  als einer Unbekannten auszudrücken. Daher folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{d\xi} &= \frac{d \left\{ \left( \frac{\rho_a}{\rho_w} \varphi \right)^2 \lambda \right\}}{d \left\{ \left( \frac{\rho_a}{\rho_w} \varphi \right)^2 \xi \right\}} = \frac{d}{d\zeta} \left( \alpha^2 \frac{\mu_w^2}{\mu_\infty^2} \right) \\ &= \frac{\mu_w^2}{\mu_\infty^2} \left[ 2\alpha \frac{d\alpha}{d\zeta} + 2\alpha^2 \psi(c_{1w}) \frac{dc_{1w}}{d\zeta} \right] \end{aligned} \tag{7.4}$$

wobei

$$\psi(c_{1w}) = \frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 c_{1w}}{1 + \varepsilon_1 c_{1w} + \varepsilon_2 c_{1w}^2} - \frac{(S_1 - S_2)/T_a}{(\tau + S_{12}/T_a)} \quad (7.5)$$

Aus (4.8m) haben wir bereits

$$\begin{aligned} P &= \alpha[1 - \beta_1(1 - c_{1w})Sc_w] \\ &= P(\alpha, c_{1w}). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Die Funktion  $F_1$ , gegeben durch (4.14) mit  $A = 0$ , ist eine Funktion von  $P$  allein. Damit und mit den Beziehungen (7.2) und (7.3) erhalten wir

$$\lambda \frac{dF_1}{d\xi} = \alpha^2 \frac{\mu_w^2}{\mu_\infty^2} \frac{dF_1}{dP} \frac{dP}{d\xi} \quad (7.7)$$

wobei

$$\frac{dP}{d\xi} = \frac{\partial P}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{d\xi} + \frac{\partial P}{\partial c_{1w}} \frac{dc_{1w}}{d\xi} \quad (7.8)$$

ist.

Die durch (4.20) gegebene Grösse  $F_7$  ist eine Funktion von  $P$  und  $c_{1w}$ , oder mit anderen Worten eine Funktion von  $\alpha$  und  $c_{1w}$ , weil  $P$  nach (7.6) eine Funktion von  $\alpha$  und  $c_{1w}$  ist. Damit und mit (7.2) und (7.3) folgt:

$$\lambda \frac{dF_7}{d\xi} = \alpha^2 \frac{\mu_w^2}{\mu_\infty^2} \left[ \frac{\partial F_7}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{d\xi} + \frac{\partial F_7}{\partial c_{1w}} \frac{dc_{1w}}{d\xi} \right] \quad (7.9)$$

Schliesslich haben wir aus (4.8a)

$$\varphi \sqrt{\lambda} = \frac{\rho_w \mu_w}{\rho_a \mu_\infty} \alpha \quad (7.10)$$

Die Impuls- und Konzentrationsgleichungen (6.1) und (6.3) reduzieren sich mit Hilfe von (7.1) bis (7.10) auf:

Impuls

$$\alpha f_1(\alpha, c_{1w}) \frac{d\alpha}{d\xi} + \alpha^2 f_2(\alpha, c_{1w}) \frac{dc_{1w}}{d\xi} = \varphi_1(\alpha, c_{1w}) \quad (7.11)$$

und

Konzentration

$$\alpha f_3(\alpha, c_{1w}) \frac{d\alpha}{d\xi} + \alpha^2 f_4(\alpha, c_{1w}) \frac{dc_{1w}}{d\xi} = \varphi_2(\alpha, c_{1w}), \quad (7.12)$$

wobei

$$f_1(\alpha, c_{1w}) = F_1(P) + \alpha \frac{\partial P}{\partial \alpha} \frac{dF_1}{dP} \quad (7.13a)$$

$$f_2(\alpha, c_{1w}) = F_1(P) \psi(c_{1w}) + \frac{dF_1}{dP} \frac{\partial P}{\partial c_{1w}} \quad (7.13b)$$

$$f_3(\alpha, c_{1w}) = F_7(P, c_{1w}) + \alpha \frac{\partial F_7}{\partial \alpha} \quad (7.13c)$$

$$f_4(\alpha, c_{1w}) = F_7(P, c_{1w}) \psi(c_{1w}) + \frac{\partial F_7}{\partial c_{1w}} \quad (7.13d)$$

$$\varphi_1(\alpha, c_{1w}) = \frac{\mu_\infty \rho_w}{\mu_w \rho_a} [\alpha + F_3] \quad (7.13e)$$

und

$$\varphi_2(\alpha, c_{1w}) = \frac{\mu_\infty \rho_w}{\mu_w \rho_a} \alpha. \quad (7.13f)$$

Aus (7.11) und (7.12) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\zeta} &= \frac{1}{\alpha} \frac{\varphi_1 f_4 - \varphi_2 f_2}{f_1 f_4 - f_3 f_2} \\ &= \frac{f}{\alpha} \end{aligned} \quad (7.14)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{dc_{1w}}{d\zeta} &= \frac{1}{\alpha^2} \left[ \frac{\varphi_2 f_1 - \varphi_1 f_3}{f_1 f_4 - f_3 f_2} \right] \\ &= \frac{g}{\alpha^2}, \end{aligned} \quad (7.15)$$

wobei  $f$  und  $g$  Abkürzungen für die Klammerausdrücke der rechten Seite von (7.14) bzw. (7.15) sind. Die Gleichungen (7.14) und (7.15) sind simultane, lineare Differentialgleichungen erster Ordnung und können durch eine der bekannten numerischen Methoden gelöst werden. An der Platten-vorderkante ist die Anfangsbedingung  $\alpha = 0$ ,  $c_{1w} = 0$  für  $\zeta = 0$ . Folglich wird  $d\alpha/d\zeta$  an dieser Stelle unendlich, und  $dc_{1w}/d\zeta$  nimmt einen unbestimmten Wert an. Diese Schwierigkeit kann dadurch überwunden werden, dass wir die Gleichungen in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{d\zeta}{d\alpha} = \frac{\alpha(f_1 f_4 - f_3 f_2)}{\varphi_1 f_4 - \varphi_2 f_2} \quad (7.16)$$

und

$$\frac{dc_{1w}}{d\alpha} = \frac{(\varphi_2/\alpha)f_1 - (f_3/\alpha)\varphi_1}{\varphi_1 f_4 - \varphi_2 f_2}. \quad (7.17)$$

Es ist klar, dass für  $\alpha = 0$ ,  $c_{1w} = 0$  auch  $d\zeta/d\alpha = 0$  ist. Der Limes von  $dc_{1w}/d\alpha$  muss aber noch bestimmt werden.

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha, c_{1w} \rightarrow 0} \frac{dc_{1w}}{d\alpha} &= \lim_{\alpha, c_{1w} \rightarrow 0} \frac{f_1 - 2(f_3/\alpha)}{2f_4} \\ &= \lim_{\alpha, c_{1w} \rightarrow 0} \frac{F_1 - 2\left(\frac{F_7}{\alpha} + \frac{\partial F_7}{\partial \alpha}\right)}{2\frac{\partial F_7}{\partial c_{1w}}}. \end{aligned} \quad (7.18a)$$

An der Plattenvorderkante, wo  $\alpha = 0$  und  $c_{1w} = 0$  ist, existiert das Blasiusprofil. Deshalb kann der Wert von  $\alpha$ , erhalten im Abschnitt 6, im Limes  $c_{1w} \rightarrow 0$  angewendet werden, um den Grenzwert der Gleichung (7.18a) zu bestimmen. Daher folgt

$$\lim_{\alpha, c_{1w} \rightarrow 0} \frac{dc_{1w}}{d\alpha} = \lim_{\alpha, c_{1w} \rightarrow 0} \frac{F_1 - 2\left(\frac{F_1 - F_7}{F_3} + \frac{\partial F_7}{\partial \alpha}\right)}{2\frac{\partial F_7}{\partial c_{1w}}} \quad (7.18b)$$

Für Helium-Ausblasen ist dieser Grenzwert 0,06195.

Daher sind die Anfangsbedingungen für die Lösung der Gleichungen (7.16) und (7.17) im allgemeinen:

$$\alpha = 0; \quad c_{1w} = 0, \quad \zeta = 0, \quad \frac{d\zeta}{d\alpha} = 0$$

und

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{dc_{1w}}{d\alpha} \quad \text{gegeben durch (7.18b)}. \quad (7.19)$$

### 7.3 Lösungsverfahren der Energiegleichung

Nach der Lösung der Gleichung (7.16) und (7.17) mit der Anfangsbedingung (7.19) ist es leicht, die Lösung der Energiegleichung (6.2) zu finden.

Die Funktion  $F_4$ , gegeben durch (4.17), ist eine Funktion von  $\alpha$ ,  $c_{1w}$  und  $e_1$ . Damit und mit den Beziehungen (7.2) und (7.3) erhalten wir

$$\lambda \frac{dF_4}{d\zeta} = \alpha^2 \frac{\mu_w^2}{\mu_\infty^2} \left[ \frac{\partial F_4}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{d\zeta} + \frac{\partial F_4}{\partial c_{1w}} \frac{dc_{1w}}{d\zeta} + \frac{\partial F_4}{\partial e_1} \frac{de_1}{d\zeta} \right]. \quad (7.20)$$

Mit Hilfe von (7.1) bis (7.10) und (7.20) reduziert sich die Energiegleichung (6.2) auf

$$\begin{aligned} F_4 + \alpha \frac{\partial F_4}{\partial \alpha} \alpha \frac{d\alpha}{d\zeta} + \left( F_4 \psi + \frac{\partial F_4}{\partial c_{1w}} \right) \alpha^2 \frac{dc_{1w}}{d\zeta} + \alpha^2 \frac{\partial F_4}{\partial e_1} \frac{de_1}{d\zeta} \\ = \varphi_3(\alpha, c_{1w}, \mathcal{H}) + e_1 \mathcal{H}_4(c_{1w}), \end{aligned} \quad (7.21)$$

wobei

$$\varphi_3(\alpha, c_{1w}, \mathcal{H}) = \left\{ (1 - \mathcal{H}) + \mathcal{H}(1 - c_{1w}) \alpha_1 \left( \frac{Sc_w}{Pr_w} - 1 \right) \right\} \varphi_2(\alpha, c_{1w}) \quad (7.22)$$

und

$$\varphi_4(c_{1w}) = \frac{\rho_w \mu_\infty}{\rho_a \mu_w} \frac{1}{Pr_w} \quad (7.23)$$

sind.

Die Gleichung (7.21) reduziert sich, wenn wir (7.14) und (7.15) darin substituieren und (6.20), (7.16) anwenden, auf

$$\frac{d(\alpha e_1)}{d\alpha} = I_1(\alpha, c_{1w}, \varphi) - e_1 I_2(\alpha, c_{1w}), \quad (7.24)$$

wobei

$$I_1(\alpha, c_{1w}, \mathcal{H}) = \frac{\left(g_1 + \alpha \frac{\partial g_1}{\partial \alpha}\right) f + \left(g_1 \psi + \frac{\partial g_1}{\partial c_{1w}}\right) g - \varphi_3}{fg_2} \quad (7.25)$$

und

$$I_2(\alpha, c_{1w}) = \frac{\alpha \frac{\partial g_2}{\partial \alpha} f + \left(g_2 \psi + \frac{\partial g_2}{\partial c_{1w}}\right) g + \varphi_4}{fg_2} \quad (7.26)$$

sind.

#### 7.4 Anfangsbedingung für die Lösung der Gleichung (7.24)

Für  $\alpha = 0, c_{1w} = 0$  (Blasiusprofil) sind die beiden Probleme von Abschnitt 6 und 7 die gleichen. Deshalb wird der Wert  $e_1$ , gegeben durch (6.26) für  $\alpha = 0, c_{1w} = 0$  (d.h. an der Plattenvorderkante), als der Anfangswert für die Lösung der Gleichung (7.24) genommen.

So sind die Anfangsbedingungen für die Lösung der Gleichung (7.24):

$$\alpha = 0; \quad c_{1w} = 0, \quad e_1 = \left(\frac{g_1 - g_3 F_7}{g_2 + g_4}\right)_{c_{1w}=0, \alpha=0} \quad (7.27)$$

In der Praxis ist es empfehlenswert, die Gleichungen (7.16), (7.17) und (7.24) gleichzeitig zu lösen.

#### 7.5 Berechnung des Wärmeübergangs

Mit der Absicht, die hier erhaltenen Ergebnisse zum Teil mit anderen Arbeiten zu vergleichen, führen wir die örtliche Nusseltsche Zahl für Wärmeübergang ein. Sie ist definiert durch

$$Nu_x = - \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w x / (T_w - T_a). \quad (7.28)$$

Mit unseren Bezeichnungen reduziert sie sich auf

$$Nu_x = \frac{b_1 \zeta}{K\alpha(1 + Qc_{1w})(1 + \varepsilon_1 c_{1w} + \varepsilon_2 c_{1w}^2) \left(1 - \frac{T_w}{T_a}\right) \left(\frac{T_w}{T_a}\right)^2 \left(\frac{u_\infty}{v_w}\right)} \quad (7.29)$$

oder

$$Kc_Q Nu_x = \frac{b_1 \zeta}{\alpha(1 + Qc_{1w})(1 + \varepsilon_1 c_{1w} + \varepsilon_2 c_{1w}^2) \left(1 - \frac{T_w}{T_a}\right) \left(\frac{T_w}{T_a}\right)^2} \quad (7.30)$$

Für das Einblasen von Luft ist der Wert der Nusseltschen Zahl in einer exakten Analyse bei  $Pr = 1$  von Lew und Fanucci [9] für  $\zeta = 0,005$ ,  $T_w/T_a = 0,5$  und  $Ma_2 = 2$  gegeben durch:

$$Nu_x = 0,09177 \left(\frac{u_\infty}{v_w}\right).$$

Durch Anwendung des Impulssatzes hat Lew [29] den Wert 0,10048 ( $u_\infty/v_w$ ) erhalten.

In der vorliegenden Analyse nimmt die Nusseltsche Zahl für das Einblasen von Luft unter den gleichen Bedingungen den Wert 0,09668 ( $u_\infty/v_w$ ) an. Dieser Wert ist besser als der von Lew erhaltene und etwa um 5,3 Prozent höher als der exakte Wert, den Lew und Fanucci berechnet haben.

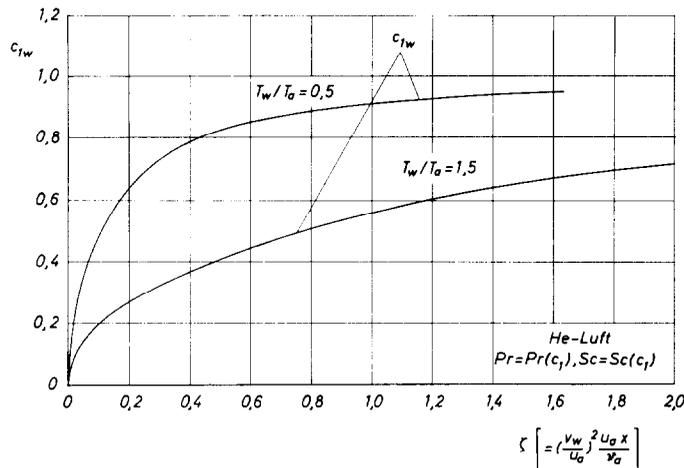


BILD 14. Verteilung der Heliumkonzentration an der Wand für zwei Wandtemperaturen ( $T_w/T_a = 0,5$  und  $1,5$ ).

### 7.6 Numerische Diskussion

Die Gleichungen (7.16), (7.17) und (7.24) für das Einblasen von Helium und für zwei Werte der Wandtemperatur, nämlich  $T_w/T_a = 0,5$  und  $1,5$ , und die Machzahlen 2 und 5, sind mit dem doppelgenauen Runge-Kutta-Verfahren auf dem IBM-7040-Rechner gelöst worden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3 und 4 aufgeführt. Auf Bild 14 ist die Änderung in der Wandkonzentration ( $c_{1w}$ ) als Funktion der Anlaufänge  $\zeta = [(v_w/u_\infty)^2 u_\infty x / v_\infty]$  für heisse und kalte Platten gezeichnet. Für einen gegebenen Wert  $\zeta$  ist die Konzentration von Helium an der kalten Platte höher als die an der heissen Platte, was auch zu erwarten war, weil mit der zunehmenden Temperatur die

Diffusion von Helium in Luft schnell stattfindet. Obwohl die Konzentration asymptotisch zunimmt, werden etwa 95 Prozent Konzentration schon bei  $\zeta = 1,64$  für  $T_w/T_a = 0,5$  erreicht.

Auf Bild 15–17 sind die Geschwindigkeits-, Konzentrations- bzw. Gesamtenthalpieprofile für verschiedene Werte der Anlaufänge  $\zeta$  an einer kalten ebenen Platte für  $T_w/T_a = 0,5$  und  $Ma_a = 2$  gezeichnet. Bild 18 zeigt die Änderung der Temperaturprofile für Machzahlen 2 und 5 für verschiedene

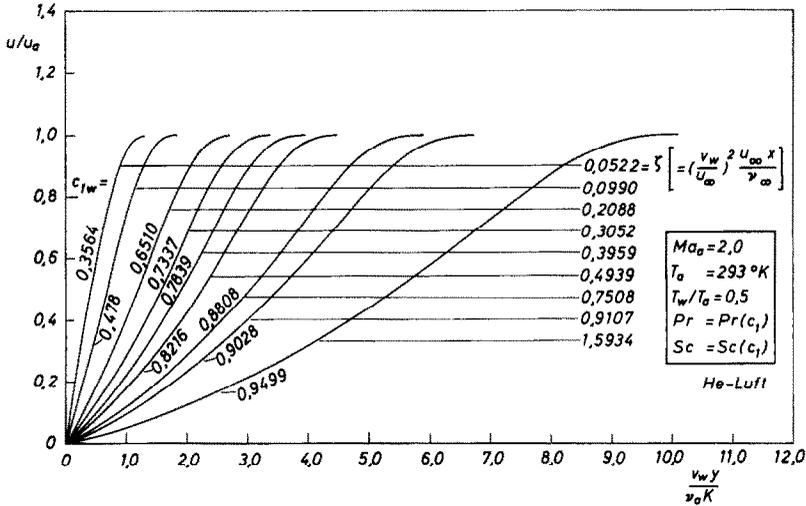


BILD 15. Ebene Platte mit gleichförmiger Injektion von Helium in Luft. Geschwindigkeitsprofile für verschiedene Werte des Entfernungsparameters  $\zeta$ .

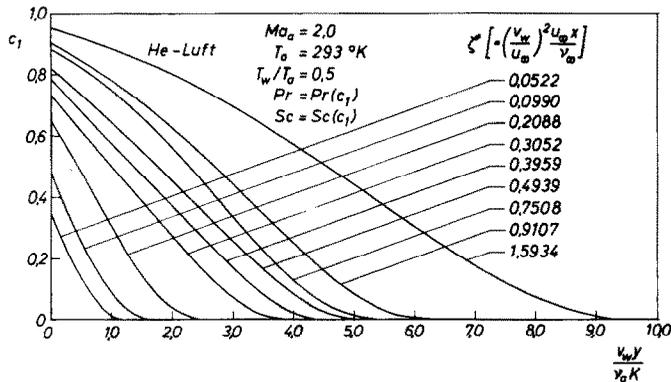


BILD 16. Ebene Platte mit gleichförmiger Injektion von Helium in Luft. Konzentrationsprofile für verschiedene Werte des Entfernungsparameters  $\zeta$ .

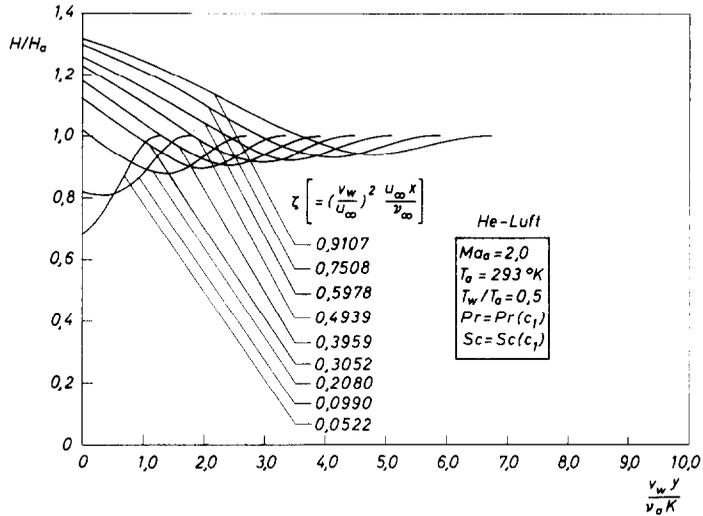


BILD 17. Ebene Platte mit gleichförmiger Injektion von Helium in Luft. Ruheenthalpieprofile für verschiedene Werte des Entfernungsparameters  $\zeta$ .

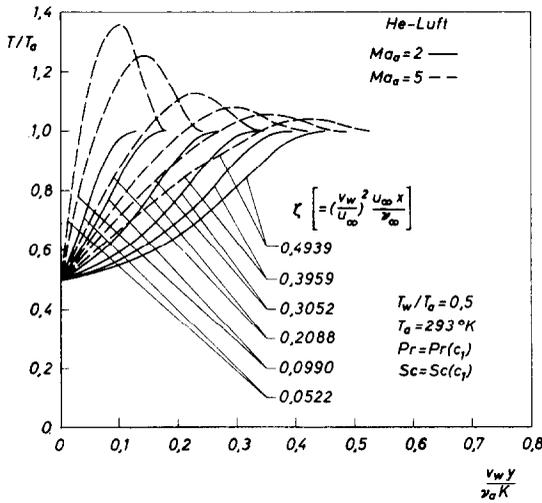


BILD 18. Ebene Platte mit gleichförmiger Injektion von Helium in Luft. Temperaturprofile für verschiedene Werte des Entfernungsparameters  $\zeta$  und die Machzahlen 2 und 5.

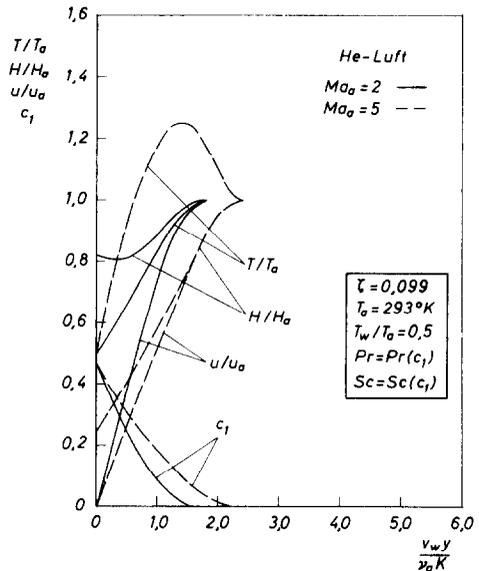


BILD 19. Wirkung der Machzahländerung auf die Konzentrations-, Geschwindigkeits-, Ruheenthalpie- und Temperaturprofile für gleichförmige Injektion von Helium in Luft.

Werte von  $\zeta$ . Die Änderung der Geschwindigkeits-, Konzentrations-, Gesamtenthalpie- und Temperaturprofile bei  $\zeta = 0,099$  für die Machzahlen 2 und 5 ist auf Bild 19 dargestellt.

Die Reibungs- und Massentransportbeiwerte sind unabhängig von der Machzahl. Auf Bild 20 und 21 kann man sehen, dass ihre Werte schnell in der Nähe der Plattenvorderkante abnehmen

und die weitere Abnahme dann asymptotisch verläuft. Bild 22 zeigt die Änderung in  $Kc_QNu_x$  als Funktion der Anlaufänge  $\zeta$  bei  $T_w/T_a = 0,5$  für die Machzahlen 2 und 5. Um zu vergleichen, ist die Kurve für Ausblasen von Luft im Fall  $Pr = 1$  auch in Bild 22 gezeichnet. Man sieht, dass der Wert  $Kc_QNu_x$  für das Ausblasen von Helium im Vergleich zu dem Ausblasen von Luft erheblich vermindert werden kann. Wie von Lew und Fanucci [9] berichtet wurde, ist für Luft-Ausblasen

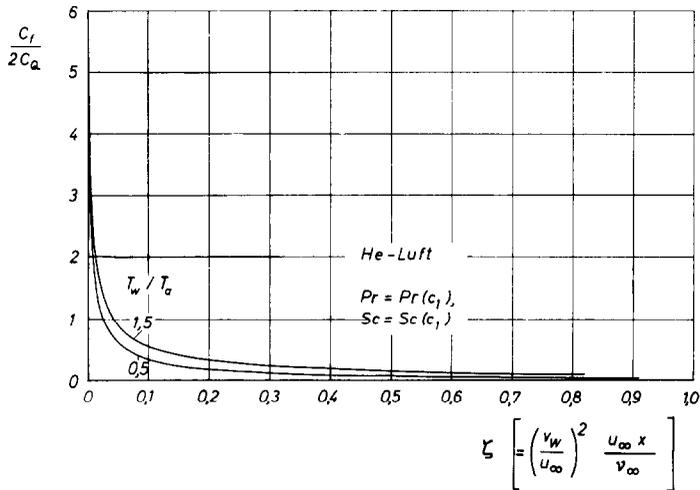


BILD 20. Abhängigkeit des Wandreibungskoeffizienten vom Entfernungsparameter  $\zeta$ .

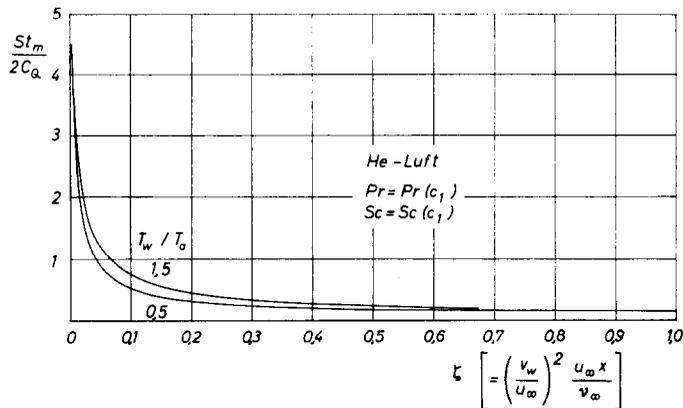


BILD 21. Abhängigkeit der Stantonzahl für Massenübergang vom Entfernungsparameter  $\zeta$ .

der Wert  $Kc_QNu_x$  gleich 0,09177 für  $\zeta = 0,005$ ,  $T_w/T_a = 0,5$  und  $Ma_a = 2$ . Für Helium-Ausblasen kann man von Tabelle 3 ablesen, dass dieser Wert etwa 0,045 beträgt, was etwa 50 Prozent niedriger liegt.

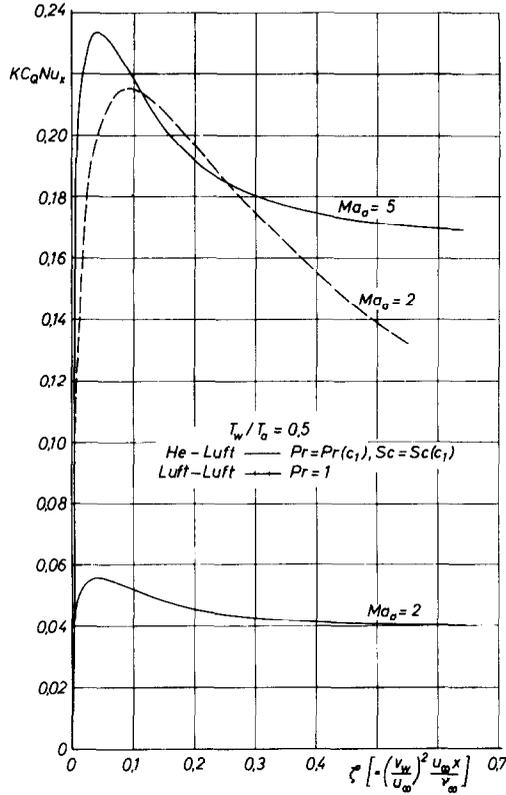


BILD 22. Abhängigkeit der Nusseltzahl für Wärmeübergang vom Entfernungsparameter  $\zeta$ .

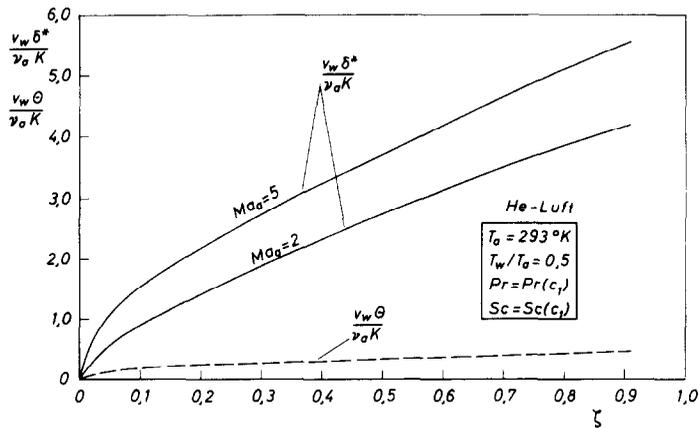


BILD 23. Wirkung der Machzahländerung auf die dimensionslosen Verdrängungs- und Impulsverlustdicken für gleichförmige Injektion von Helium in Luft.

Tabelle 3.  $v_w = \text{const}$ ,  $T_w/T_a = 0,5$ ,  $T_a = 293^\circ\text{K}$

$\alpha$	$c_{1w}$	$\zeta$	$Ma = 2$ $e_1$	$Ma = 5$ $e_1$	$c_f/2c_Q$	$St_m/2c_Q$	$Ma = 2$ $Kc_Q Nu_x$	$Ma = 5$ $Kc_Q Nu_x$
0,0	0	0	1,17839	1,46996	$\infty$	$\infty$	0	0
0,7	0,12509	0,00494	0,89130	1,38989	3,31307	4,48648	0,04439	0,18447
2,0	0,35638	0,05221	0,08443	1,18615	0,60254	0,86943	0,05596	0,23277
2,6	0,47798	0,09903	-0,30511	1,03361	0,34574	0,52469	0,05229	0,21832
3,5	0,65098	0,20884	-0,64972	0,81267	0,17307	0,30307	0,04535	0,19057
4,1	0,73374	0,30516	-0,70942	0,71552	0,12173	0,24398	0,04276	0,18163
4,6	0,78389	0,39588	-0,70520	0,66041	0,09562	0,21624	0,04153	0,17547
5,1	0,82166	0,49392	-0,67774	0,62060	0,07772	0,19836	0,04075	0,17235
5,6	0,85059	0,59777	-0,63988	0,59074	0,06481	0,18613	0,04019	0,17014
6,3	0,88078	0,75078	-0,58147	0,55939	0,05188	0,17454	0,03959	0,16775
7,0	0,90279	0,91071	-0,52393	0,53556	0,04271	0,16675	0,03907	0,16568
9,8	0,94991	1,59344	-0,34050	0,47285	0,02331	0,15175	0,03705	0,15735
10,0	0,95189	1,64397	-0,33032	0,46939	0,02249	0,15117	0,03689	0,15672

Auf Bild 23 sind die dimensionslosen Verdrängungs- und Impulsverlustdicken als Funktion der Anlaufänge  $\zeta$  für die Machzahlen 2 und 5 gezeichnet. Die Impulsverlustdicke ist unabhängig von der Machzahl, während die Verdrängungsdicke mit wachsender Machzahl zunimmt.

Bei einer Kegelspitze, die symmetrisch in einer Überschallströmung liegt [27], sind Druck, Geschwindigkeit und Dichte hinter dem Stoss längs einer durch die Kegelspitze verlaufenden geraden Linie ausserhalb der Grenzschicht konstant, solange der halbe Öffnungswinkel des Kegels kleiner als der kritische Winkel ist. Die Strömung in der Grenzschicht am Kegelmantel kann daher aus der Strömung in der laminaren Grenzschicht an einer längsangeströmten ebenen Platte bestimmt werden, bei der die gleiche Dichte und Geschwindigkeit wie in der Strömung ausserhalb der Grenzschicht der Kegelspitze vorhanden ist.

Der Reibungsbeiwert, die Stantonzahl für Massenübergang und die Stantonzahl für Wärmeübergang sind folgendermassen für beide Systeme verbunden [27].

$$\frac{c_f \sqrt{(Re_x)}}{[c_f \sqrt{Re_s}]_A} = \frac{St_m \sqrt{(Re_x)}}{[St_m \sqrt{Re_s}]_A} = \frac{St_h Re_x}{[St_h \sqrt{Re_s}]_A} = \left[ \frac{\int_0^s r_0^2(s) ds}{sr_0^2(s)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8.9)$$

wobei der Index  $A$  die Werte für Rotationskörper darstellt.

Oberflächenreibung, Wärme- und Massenübergang sind beim Kegel um den Faktor  $\sqrt{3}$  grösser als bei einer entsprechenden ebenen Platte mit der gleichen Dichte, Druck, Reynoldszahl usw.

Als Beispiel sind die Konzentrations-, Geschwindigkeits-, Gesamtenthalpie- und Temperaturprofile für  $Ma_v = 10$ ,  $Ma_h = 4,875$ ,  $\Theta = 22^\circ$ ,  $\Delta = 16,74^\circ$ ,  $T_v = 223^\circ\text{K}$ ,  $T_h = 825,1^\circ\text{K}$ ,  $T_w/T_a = 1,0$  und 2,0 und  $[f_w]_A = -(\sqrt{3})/10$  in Bild 24 eingetragen.

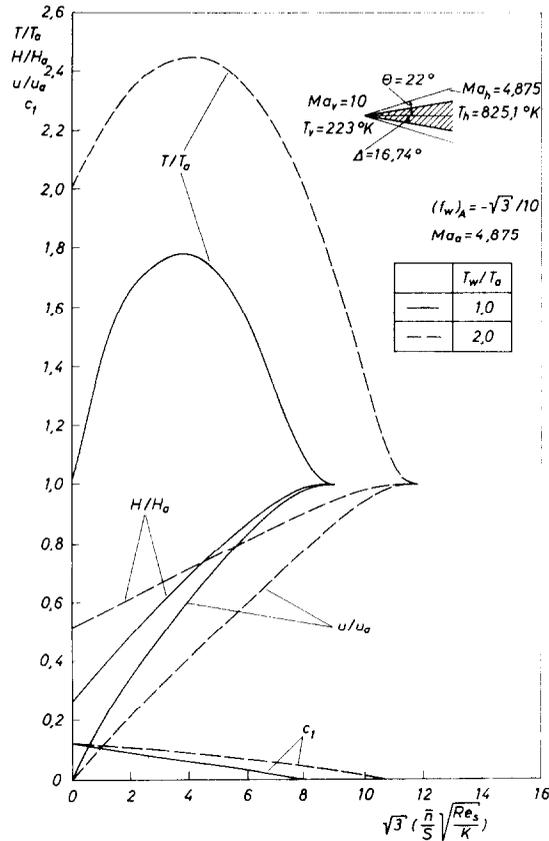


BILD 24. Konzentrations-, Geschwindigkeits-, Ruheenthalpie- und Temperaturprofile an einem Kreiskegel mit Injektion von Helium in Luft und für verschiedene Wandtemperaturen.

## 8. SCHLUSSBEMERKUNGEN

Beim Flug mit hohen Überschallgeschwindigkeiten werden als Folge des Aufstaus und der damit verbundenen zähen Dissipation in der am bewegten Körper sich ausbildenden Grenzschicht Oberflächentemperaturen erreicht, die mit dem Quadrat der Machzahl anwachsen (vergl. Gleichung (5.31)). Derartige Temperaturen werden eine Steigerung der Fluggeschwindigkeiten ernstlich begrenzen. In der vorliegenden Untersuchung wird die Wirkung des Einblasens eines Kühlmittels durch die Oberfläche betrachtet, dessen physikalische Eigenschaften von denen der Aussenströmung verschieden sind. Wegen der Kompliziertheit der Grenzschichtgleichungen wird ein Näherungsverfahren benutzt. Es ist bemerkenswert, dass die näherungsweise Ergebnisse auch in denjenigen Fällen sehr nützlich sind, wo an sich exakte numerische Lösungen existieren, weil die Näherungsergebnisse in geschlossener Form vorliegen und daher für eine Untersuchung der Parameteränderungen in solchen Fällen geeignet sind, auf die sich die numerischen Ergebnisse nicht erstrecken.

Obwohl wir uns bei den Berechnungen auf die Geometrie der ebenen Platte und des Kreiskegels beschränkt haben, ist die in Abschnitt 4 entwickelte Analysis von allgemeiner Art, und auch die

Fälle mit nichtverschwindenden Druckgradienten können damit behandelt werden. In solchen Fällen scheint jedoch eine simultane numerische Lösung der Impuls-, Spezies- und Energiegleichung unvermeidlich zu sein.

Tabelle 4.  $v_w = \text{const}$ ,  $T_w/T_a = 1,5$ ,  $T_a = 293^\circ\text{K}$

$\alpha$	$c_{1w}$	$\zeta$	$Ma = 2$ $e_1$	$Ma = 5$ $e_1$	$c_f/2c_Q$	$St_w/2c_Q$	$Ma = 2$ $Kc_QNu_x$	$Ma = 5$ $Kc_QNu_x$
0,0	0	0	0,24834	1,19228	$\infty$	$\infty$	0	0
0,7	0,12495	0,03585	-0,66913	0,92494	1,10491	1,49783	-0,00709	-0,11988
2,0	0,35545	0,37205	-3,18804	0,20951	0,20130	0,29109	-0,00900	-0,14954
2,6	0,47649	0,69943	-4,22559	-0,13590	0,11561	0,17585	-0,00867	-0,13973
3,5	0,64945	1,45889	-4,88635	-0,45076	0,05786	0,10145	-0,00784	-0,12119
4,1	0,73246	2,12334	-4,82302	-0,51150	0,04067	0,08159	-0,00752	-0,11430
4,6	0,78284	2,74942	-4,64022	-0,51357	0,03193	0,07226	-0,00737	-0,11104
5,1	0,82082	3,42660	-4,41399	-0,49425	0,02595	0,06625	-0,00729	-0,10897
5,6	0,84990	4,14454	-4,17756	-0,46500	0,02163	0,06214	-0,00722	-0,10752
6,3	0,88027	5,20347	-3,85739	-0,41837	0,01731	0,05824	-0,00713	-0,10597
7,0	0,90239	6,31146	-3,56334	-0,37172	0,01424	0,05563	-0,00709	-0,10468
9,8	0,94973	11,04880	-2,66802	-0,22209	0,00777	0,05060	-0,00678	-0,09949
10,0	0,95172	11,39970	-2,61850	-0,21382	0,00750	0,05041	-0,00675	-0,09910

LITERATUR

- N. A. HALL, Flow equations for multicomponent fluid systems, Heat Transfer Lab. Tech. Rep. 2, University of Minnesota (1955).
- J. R. BARON, The binary mixture boundary layer associated with mass transfer cooling at high speeds, Tech. Rep. 160 (1956), Mass Inst. Technology, Naval Supersonic Laboratory, Cambridge, Massachusetts.
- W. WUEST, Laminare Grenzschichten bei Ausblasen eines anderen Mediums (Zweistoffgrenzschichten), Vortrag auf dem Internationalen Kongress für Angewandte Mechanik in Stresa (1960), Ing.-Archiv 31, 125-143 (1962). Royal Aircraft Establishment, LT 1055 (1964).
- J. P. HARTNETT und E. R. G. ECKERT, Mass transfer cooling in a laminar boundary layer with constant fluid properties. *Trans. Am. Soc. Mech. Engrs* 79, 247-254 (1957).
- H. SCHLICHTING und K. BUSSMAN, Exakte Lösungen für die laminare Reibungsschicht mit Absaugung und Ausblasen, *Schr. Dt. Akad. Luft. Forsch.* 7, 25-69, Bd. 2 (1943).
- J. L. BANSAL, Heat and mass transfer in a laminar boundary layer on a flat plate with variable suction or injection velocity and constant wall temperature, *Int. J. Heat Mass Transfer* 12, 173-186 (1969).
- H. SCHLICHTING, *Grenzschicht-Theorie*. Verlag G. Braun, Karlsruhe (1965).
- S. W. YUAN, Heat transfer in laminar compressible boundary layer on a porous flat plate with fluid injection. *J. Aeronaut. Sci.* 16, (12) (1949).
- H. G. LEW und J. B. FANUCCI, On the laminar compressible boundary layer over a flat plate with suction or injection, *J. Aeronaut. Sci.* 22, 589-597 (1955).
- M. MORDUCHOW, On heat transfer over a sweat-cooled surface in laminar compressible flow with a pressure gradient, *J. Aeronaut. Sci.* 19, 705-712 (1952).
- R. IGLISCH, Exakte Berechnung der laminaren Grenzschicht an der längsangeströmten ebenen Platte mit homogener Absaugung, *Schr. Dt. Akad. Luft. Forsch.* 8B, Nr. 1 (1944); NACA TM 1205 (1949).
- M. MORDUCHOW, Review of theoretical investigations on the effect of heat transfer on laminar separation, *AIAA Jl* 3, 1377 (1965).
- M. MORDUCHOW und S. P. REYLE, On the compressible laminar boundary layer with suction, *Int. J. Heat Mass Transfer* 10, 1233-1254 (1967).
- H. SCHUH, The solution of the laminar boundary layer equation for the flat plate for velocity and temperature fields for variable physical properties and for the diffusion field at high concentration, NACA TM 1275 (1950).
- J. W. SMITH, Effect of diffusion fields on the laminar boundary layer, *J. Aeronaut. Sci.* 21 (1954).
- W. WUEST, Kompressible laminare Grenzschichten bei Ausblasen eines anderen Mediums, *ZWF* 11, 398-409 (1963).
- W. WUEST, Wärmeübertragung in laminaren Überschallgrenzschichten mit Einblasen eines leichten Gases bei beliebiger Druck- und Temperaturverteilung, Vortrag auf dem VI. Europäischen Luftfahrtkongress, München (1965), Jahrbuch 1965 der WGLR.
- E. R. G. ECKERT et al., Cooling of a laminar boundary layer by injection of a light-weight foreign gas, *Jet Propulsion* 28, S.34 (1958).

19. E. R. G. ECKERT, Mass transfer cooling, a means to protect high speed aircraft, presented at the first International Congress of Aeronautical Sciences, Madrid, Spain (1958).
20. E. R. G. ECKERT and P. J. SCHNEIDER, Diffusion effects in an isothermal binary boundary layer, Tech. Rep. 5, University of Minnesota (1955).
21. J. F. GROSS *et al.*, A review of binary boundary layer characteristics. Research Memorandum RM-2516, U.S. Air Force Project RAND (1959).
22. K. POHLHAUSEN, Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht. *Z. Angew. Math. Mech.* **1** (1921).
23. W. WUEST, Näherungsweise Berechnung von kompressiblen laminaren Grenzschichten mit Ausblasen eines anderen Mediums, Bericht 64 A 16, Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen (1964).
24. J. L. BANSAL, Näherungsweise Berechnung des Wärme- und Stoffaustausches in laminaren Überschallgrenzschichten bei Ausblasen eines leichten Gases. Dissertation Göttingen 1969, Bericht 69A29 AVA (1969), Bericht 8/1969 Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Göttingen.
25. J. O. HIRSCHFELDER, C. F. CURTISS und R. B. BIRD, *Molecular Theory of Gases and Liquids*. John Wiley, New York (1954).
26. S. CHAPMAN und T. G. COWLING, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*. Cambridge University Press (1939).
27. W. H. DORRANCE, *Viscous Hypersonic Flow*. McGraw-Hill, New York (1962).
28. C. R. FAULDERS, A note on laminar boundary layer skin friction under the influence of foreign-gas injection, *J. Aero/Space Sci.* **28** (1961).
29. H. G. LEW, The cooling of a flat plate in a laminar compressible flow by uniform fluid injection P.I.B.A.L. Report No. 131, Polytechnic Institute of Brooklyn (1948).

#### APPROXIMATE CALCULATION OF HEAT- AND MASS TRANSFER IN LAMINAR SUPERSONIC BOUNDARY LAYERS WITH INJECTION OF A LIGHT GAS

**Abstract**—The following research is intended to develop a general approximate solution for the binary mixture boundary layer when the fluid properties are variable and the Prandtl and Schmidt numbers are arbitrary and concentration dependent. The method developed is applied to different flow problems and the results are compared, wherever possible, with the known exact solutions. It is found, contrary to the results of Baron, that in helium injection the Prandtl number at the wall does not decrease below 0.675. Moreover, the results of skin friction and mass-transfer obtained in the present analysis for arbitrary Schmidt number, do approach to the  $Pr = Sc = 1$  analysis when Schmidt number approaches unity. Besides, the method helps in finding a solution for the flow past a flat plate with homogeneous injection for which a similar solution is not possible.

#### CALCUL APPROCHÉ DU TRANSFERT THERMIQUE ET MASSIQUE DANS DES COUCHES LIMITES LAMINAIRES SUPERSONIQUES AVEC INJECTION D'UN GAZ LÉGER

**Résumé**—On a mené cette recherche afin de développer une solution générale approchée de la couche limite de mélange binaire quand les propriétés du fluide sont variables et quand les nombres de Prandtl et de Schmidt dépendent de la concentration. La méthode développée est appliquée à différents problèmes d'écoulement et les résultats sont comparés, partout où c'est possible, avec les solutions exactes connues. On trouve, contrairement aux résultats de Baron que lors d'une injection d'hélium le nombre de Prandtl à la paroi ne décroît pas au-dessous de 0,675. De plus, les résultats de frottement superficiel et de transfert massique obtenus dans l'analyse présente pour des nombres de Schmidt arbitraires, approchent l'analyse à  $Pr = Sc = 1$  quand le nombre de Schmidt approche l'unité. D'autre part, la méthode permet de trouver une solution pour l'écoulement sur une plaque plane avec injection homogène, cas pour lequel une solution similaire n'est pas possible.

#### ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА В ЛАМИНАРНЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЯХ ПРИ ИНЖЕКЦИИ ЛЕГКОГО ГАЗА

**Аннотация**—В настоящем исследовании пытаются найти общее приближенное решение для пограничного слоя двойной смеси, когда свойства жидкости переменные и числа Прандтля и Шмидта произвольные и зависящие от концентрации. Разработанный метод применяется к различным проблемам потока и результаты сравниваются, если возможно, с известными точными решениями. В отличие от результатов Барона нашли, что при инжекции гелия число Прандтля у стенки не падает ниже 0,675. Кроме того, результаты трения поверхностного слоя и переноса массы, полученные при настоящем

анализе для произвольного числа Шмидта приближаются к анализу  $Pr = Sc = 1$ , когда число Шмидта приближается к единице. Этот метод также позволит построить решение для потока с гомогенной инжекцией при обтекании плоской пластины для которого аналогичное решение невозможно.